CURSO DE MATHEMATICAS ELEMENTARES

ELEMENTOS
DE
TRIGONOMETRIA

COM
NUMEROSOS EXERCICIOS
POR F. I. C.

Revistos e adaptados ás escolas de instrucção secundaria do Brazil

PELO

EUGENIO DE BARROS RAJA GABAGLIA
Doctor em sciencias physicas e mathematicas
Lente do Gymnasio Nacional
e dos Escolas Naval e Polytechnica de Rio de Janeiro

LIVRARIA GARNIER

109, Rua do Ouvidor, 109
RIO DE JANEIRO

6, Rue des Saints-Pères, 6
PARIS

Gerkes Rocha
1935.

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

Curso de mathematicas elementares.

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

COM

NUMEROSOS EXERCICIOS

POR F. I. C.

REVISTOS E ADAPTADOS ÁS ESCOLAS DE INSTRUCÇÃO SECUNDARIA DO BRAZIL

PELO

Dr E. DE B. RAJA GABAGLIA

LIVRARIA GARNIER

109, RUA DO OUVIDOR, 109
RIO DE JANEIRO

6, RUE DES SAINTS-PÈRES, 6
PARIS

ELEMENTOS

DE

TRIGONOMETRIA

RECTILINEA

PRELIMINARES

§ I. — Segmentos de recta.

I. Definições. — Um movel póde deslocar-se sobre uma recta em dois sentidos oppostos; um d'elles, tomado arbitrariamente, chama-se *sentido positivo*; o outro é o *sentido negativo*.

Chama-se *recta dirigida*, uma recta indefinida sobre a qual se escolheu o sentido positivo.

Chama-se *segmento de recta* uma parte de recta que se suppõe percorrida por um movel em um sentido determinado. O ponto de partida do movel é a *origem* do segmento; seu ponto de chegada é a *extremidade* do segmento.

Entre dois pontos A, B, existem dois segmentos distinctos; pois póde se tomar por origem o ponto A ou o ponto B. Estes dois segmentos têm o mesmo comprimento, medido por um mesmo numero; mas está convencionado representar-se esse numero por AB ou por BA conforme o movel caminha de A para B ou de B para A, a primeira letra da notação designando sempre a origem do segmento considerado.

Quando um segmento AB pertence a uma recta dirigida, qualifica-se de *positivo* ou de *negativo*, segundo que seu proprio sentido coincide com o sentido positivo da recta, ou com o sentido negativo. Então a notação AB já não representa sómente um numero arithmetico, mas sim um numero algebrico, positivo ou negativo: aquelle cujo valor absoluto mede a distancia dos pontos A e B e cujo signal + ou — marca o sentido do segmento AB.

Se o segmento AB é positivo, o segmento BA é negativo e reciprocamente. Em todos os casos, podemos escrever

$$AB = -BA$$

d'onde

$$AB + BA = 0 \qquad (A)$$

II. Lemma. — *A somma algebrica de tres segmentos consecutivos, taes que a extremidade do ultimo coincide com a origem do primeiro, é nulla.*

Em outros termos, se tres pontos A, B, C estão dispostos sobre a mesma recta n'uma ordem qualquer, temos sempre

$$AB + BC + CA = 0 \qquad (B)$$

1º *Supponhamos AB positivo.* — Em relação aos outros dois, o ponto C póde ser collocado successivamente de tres maneiras: sobre o prolongamento de AB, entre A e B, ou sobre o prolongamento de BA.

No primeiro caso escrevendo-se primeiramente só segmentos positivos,

Fig. 1.

temos $AB + BC = AC = -CA$

d'onde $AB + BC + CA = 0$

No segundo caso,

Fig. 2.

temos $AC + CB = AB$

ou $-CA - BC = AB$

d'onde $AB + BC + CA = 0$

No terceiro caso,

Fig. 3.

temos $CA + AB = CB = -BC$

e por consequencia $AB + BC + CA = 0$

2º *Supponhamos AB negativo.* — Ha tres casos analogos a distinguir; mas esses tres novos casos vêm a dar nos tres primeiros, mudando o sentido positivo da recta dirigida; o que equivale a mudar o signal de todos os termos da igualdade (B).

Essa relação é pois verificada em todos os casos possiveis.

III. Theorema de Mobius. — *A somma algebrica de um numero qualquer de segmentos consecutivos, taes que a extremidade do ultimo coincide com a origem do primeiro, é nulla.*

Trata-se de demonstrar que se n pontos A, B, C.... K, L acham-se collocados sobre uma recta de uma maneira qualquer, temos sempre

$$AB + BC + \ldots + KL + LA = 0 \qquad (C)$$

Este theorema já se acha demonstrado para dois pontos e para tres pontos, em virtude das igualdades (A) e (B).

Ora, se é verdadeiro para $(n-1)$ pontos, tambem o é, *ipso facto*, para n pontos.

Se o theorema é verdadeiro para os $(n-1)$ pontos A, B, C.... J, K, temos

$$AB + BC + \ldots + JK + KA = 0$$

Póde-se, porém, applicar o theorema aos tres pontos A, K, L; o que dá

$$AK + KL + LA = 0$$

Ajuntando membro a membro essas duas igualdades e supprimindo o binomio nullo $AK + KA$, vem

$$AB + BC + \ldots + JK + KL + LA = 0$$

Logo, desde que o theorema é applicavel a $n-1$ pontos, tambem o é a n pontos.

Isto posto, o theorema, verdadeiro para tres pontos, tambem o é para quatro pontos; sendo verdadeiro para quatro pontos, tambem o é para cinco, etc. Por conseguinte elle é geral *.

IV. Corollario. — *A somma algebrica de muitos segmentos consecutivos de uma mesma recta é igual ao segmento que une a origem do primeiro á extremidade do ultimo.*

Effectivamente, os segmentos consecutivos AB, BC,.... KL, satisfazem á relação (C), que se póde escrever

$$AB + BC + \ldots + KL = -LA = AL$$

§ II. — Projecções orthogonaes sobre um eixo.

V. Projecção de um ponto. — *Chama-se projecção de um ponto A sobre uma recta X'X, o pé a da perpendicular baixada d'esse ponto sobre essa recta.*

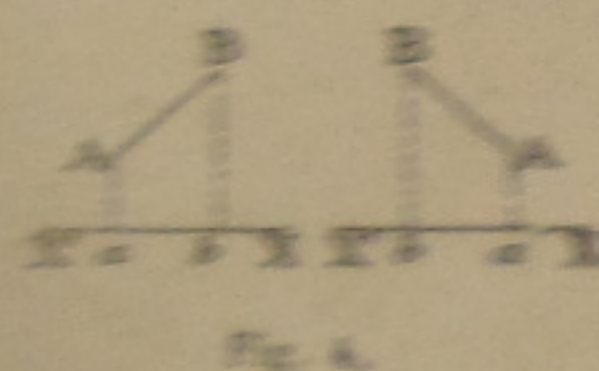
Uma recta indefinida X'X, sobre a qual projecta-se um ou mais pontos, chama-se eixo de projecção.

VI. Projecção de um segmento. — *Chama-se projecção de um segmento rectilineo AB, sobre um eixo X'X, o segmento ab que une a projecção da origem A á projecção da extremidade B.*

Escreve-se $\quad$ proj. $AB = ab$

Em geral, a recta AB tendo uma direcção qualquer, sobre a qual não se escolhe um sentido positivo, o segmento AB, se bem que tenha um sentido, não está entretanto affecto de nenhum signal e só se considera o seu valor absoluto. O eixo X'X, ao contrario, é uma recta dirigida; e, por consequencia, a projecção *ab* é positiva ou negativa.

Fig. 4.

---

* Este theorema tambem póde ser demonstrado da seguinte modo:

Applicando o lemma a cada grupo de pontos

$$ABC,\ ACD,\ ADE,\ \ldots\ AKL,$$

póde-se escrever

$$AB + BC + CA = 0$$
$$AC + CD + DA = 0$$
$$AD + DE + EA = 0$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$AK + KL + LA = 0$$

Se addicionarmos todas essas igualdades membro a membro, notando que os termos sublinhados se destroem dois a dois em virtude da relação (A) vem

$$AB + BC + CD + \ldots + KL + LA = 0$$

VII. Translação do eixo. — *As projecções de um mesmo segmento de recta sobre dois eixos parallelos são iguaes e tem o mesmo signal.*

Essas projecções são iguaes em valor absoluto, como porções de parallelas comprehendidas entre parallelas; e tem evidentemente o mesmo signal, se a direcção positiva é a mesma sobre os dois eixos.

VIII. Observação I. — *As projecções de dois segmentos iguaes e de sentido contrarios* AB, BA, *sobre o mesmo eixo, são iguaes e de signaes contrarios.*

Essas projecções são ab e ba.

Temos (I, A) $$ab = -ba.$$

IX. Observação II. — A projecção de um segmento AB sobre um eixo X'X é nulla em duas circumstancias :

1° Quando o segmento AB é nullo ;
2° Quando o segmento AB é perpendicular ao eixo X'X.

X. Contorno polygonal. — Quando um movel descreve uma linha polygonal ABC...KL, no sentido marcado pela ordem das letras, seu ponto de partida, A, se chama *origem do contorno*, e seu ponto de chegada, L, a *extremidade do contorno*.

O segmento AL, que une a origem do contorno á sua extremidade, se chama a *resultante do contorno polygonal*.

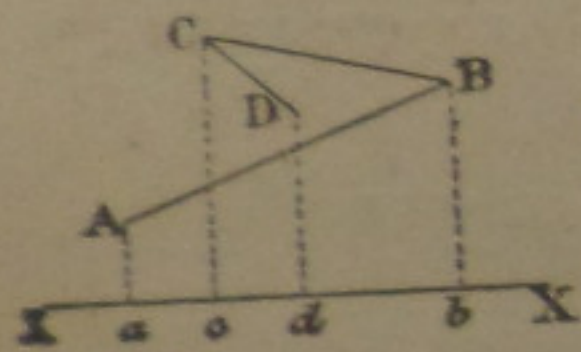



Fig 5.

XI. Projecção de um contorno. — *Chama-se projecção de um contorno polygonal sobre um eixo, a somma algebrica das projecções, sobre esse eixo, de cada um dos lados do polygono.*

A projecção do contorno ABCD se escreve :

$$\text{proj.}\,(ABCD) = \text{proj.}\,AB + \text{proj.}\,BC + \text{proj.}\,CD = ab + bc + cd$$

XII. Theorema das projecções. — *A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é igual á projecção de sua resultante sobre esse mesmo eixo.*

Sejam um contorno polygonal ABC....KL, e sua resultante AL. Designemos por $a, b, c, \ldots k, l,$ as projecções de cada um dos vertices.

Temos $$\text{proj.}\,(ABC....KL) = ab + bc + \ldots + kl$$
e $$\text{proj.}\,AL = al$$

Ora, qualquer que seja a ordem dos pontos $a, b, \ldots. k, l$, sobre o eixo de projecção, temos, segundo a formula de Möbius (III, C)

$$ab + bc + \ldots. + kl + la = 0$$
d'onde $$ab + bc + \ldots + kl = -la = al$$
isto é, $$\text{proj.}\,(ABC \ldots KL) = \text{proj.}\,AL$$

XIII. Corollario I. — *se duas linhas polygonaes têm a mesma origem e a mesma extremidade, suas projecções sobre um mesmo eixo são iguaes.*

Com effeito, cada uma d'ellas é igual á projecção de uma resultante commum.

XIV. Corollario II. — *A projecção de um contorno fechado, sobre um eixo qualquer, é nulla.*

Com effeito, essa projecção é egual á da resultante ; ora, a resultante sendo nulla, sua projecção é nulla (IX).

Em todo caso, a projecção de um contorno fechado ABCDA é a somma.

$$ab + bc + cd + da$$

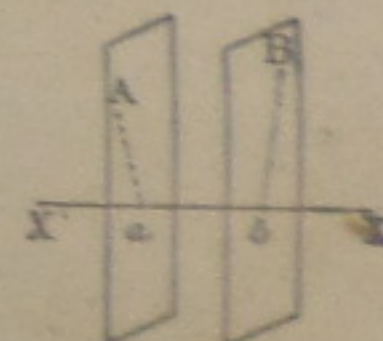
que sabemos ser identicamente nulla (III).

Observação. — A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é nulla em duas circumstancias :

1° Quando a resultante é nulla, isto é, quando o polygono é fechado ;
2° Quando a resultante é perpendicular ao eixo de projecção

XV. Polygono reverso. — Assim se chama um contorno polygonal cujos lados não se acham todos no mesmo plano.

Fig. 6.

As definições dadas precedentemente não exigem que os diversos pontos projectados sobre um eixo estejam no mesmo plano passando por esse eixo ; mas para obter as projecções $a, b, \ldots.$ de diversos pontos A, B,... que não estão no mesmo plano, faz-se passar por cada um d'esses pontos um plano perpendicular ao eixo de projecção ; as intersecções d'esses planos com o eixo são as projecções procuradas.

XVI. — *Para que um contorno polygonal seja fechado, é necessario e sufficiente que suas projecções sobre tres eixos, formando um angulo triedro, sejam nullas separadamente para cada um dos eixos.*

Essa condição é *necessaria ;* pois, quando um contorno é fechado, sua projecção sobre um eixo é sempre nulla (XIV).

A condição é *sufficiente ;* pois, se a projecção de um contorno sobre um eixo é nulla, a resultante d'esse contorno é nulla ou perpendicular ao eixo. Ora a resultante não póde ser perpendicular ao mesmo tempo aos tres eixos considerados. Por consequencia, a resultante é nulla, isto é, o contorno é fechado.

XVII. Observação. — *Para que um contorno polygonal plano seja fechado, basta que suas projecções sobre duas rectas concurrentes, situadas no seu plano, sejam nullas separadamente para cada um dos eixos.*

Com effeito, a resultante não póde ser perpendicular ao mesmo tempo a duas rectas concurrentes situadas com ella no mesmo plano. Por consequencia, se a projecção do contorno é nulla para cada um d'esses eixos, a resultante é nulla e o contorno é fechado.

§ III. — Das funcções.

XVIII. Variavel independente. — *Uma variavel é denominada independente, quando se lhe attribue arbitrariamente os valores que ella é susceptivel de tomar.*

XIX. Funcção de uma variavel. — *Uma variavel é denominada funcção de uma variavel independente, quando a cada valor d'esta corresponde um valor determinado d'aquella.*

Por exemplo, quando um corpo cahe em queda livre, o espaço percorrido por esse corpo é funcção do tempo empregado em percorrel-o: a cada valor t do tempo de queda corresponde um valor e do espaço percorrido. Sabemos que os valores correspondentes e, t, estão ligados entre si pela fórmula algebrica

$$e = \frac{gt^2}{2}$$

Qualquer expressão algebrica que contenha uma variavel x é uma funcção d'essa variavel; assim, x e y representando duas variaveis e, a, b, c, numeros dados, a fórmula

$$y = ax^2 + bx + c$$

permitte calcular um valor de y correspondente a cada valor attribuido a x.

XX. Funcções transcendentes. — Chamam-se funcções transcendentes certas funcções que não podem ser exprimidas algebricamente por meio de sua variavel independente. Taes são os logarithmos e as funcções circulares.

Não tardaremos em definir as funcções circulares, assim denominadas porque ellas formam-se da consideração do circulo.

Em todo systema de logarithmos, assim como se vê em algebra, cada numero positivo x admitte um logarithmo y. Póde-se escrever

$$y = \log. x$$

Mas esta igualdade, puramente symbolica, não dá a conhecer as operações que se tem de effectuar sobre o numero x para obter seu logarithmo y.

Para que se possa utilisar uma semelhante funcção na pratica, é necessario ter taboas numericas que dêm, em frente de cada valor do numero x o valor correspondente da funcção y.

XXI. Notações. — Diversas funcções f, F, φ.... de uma mesma

variavel independente x, são representadas frequentes vezes por symbolos taes como $f(x)$, $F(x)$, $\varphi(x)$....

Os valores que toma uma mesma funcção $f(x)$ para valores particulares de sua variavel $x=a$, $x=b$, $x=c$.... se representam pelas notações $f(a)$, $f(b)$, $f(c)$....

As letras f, t, φ se denominam *caracteristicas* das funcções.

XXII. Funcção periodica. — *Uma funcção é denominada periodica quando seu valor não muda ajuntando-se á sua variavel independente uma quantidade determinada, ou um qualquer dos multiplos d'essa quantidade.*

A amplitude do periodo é a mais pequena das quantidades cujos multiplos addicionados á variavel independente reproduz o valor da funcção

Por exemplo, ω designando uma quantidade determinada, e k um numero inteiro qualquer; se, para todo valor de x e para todo valor do numero inteiro k, temos

$$f(x + k\omega) = f(x)$$

a funcção $f(x)$ é *periodica*, e a *amplitude* do periodo é ω.

XXIII. Funcções inversas. — *Chamam-se funcções inversas duas variaveis que são funcções uma da outra.*

Por exemplo, se y é uma funcção f da variavel x, inversamente, x é uma funcção φ de y considerada por sua vez como uma variavel independente. Estas duas funcções $y = f(x)$ e $x = \varphi(y)$ denominam-se *inversas* uma da outra.

XXIV. Representação geometrica das funcções. — Tracemos dois *eixos* rectangulares X'X, Y'Y que se cortam no ponto O e escolhemos sobre esses eixos as direcções positivas OX, OY indicadas por flechas.

Sejam x e y dois valores correspondentes quaesquer, da variavel independente x e da funcção y, que se trata de representar.

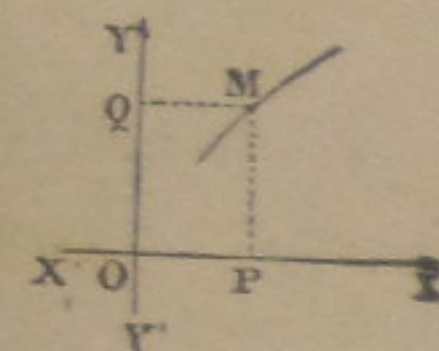
Fig. 7.

A unidade de comprimento sendo tomada arbitrariamente, tomemos sobre OX e sobre OY, a partir da *origem* O um segmento OP medido em grandeza e signal pelo numero x e um segmento OQ medido em grandeza e signal pelo numero y; em seguida terminemos o parallelogramma QOPM.

Suppondo que x varia de um modo continuo, y varia tambem, em geral, de um modo continuo, e o ponto M descreve no plano dos eixos uma linha continua que é a representação graphica da funcção considerada.

Os segmentos OP, OQ são as *coordenadas* do ponto M; OP chama-se a *abscissa* e OQ ou PM a *ordenada* do ponto M.

O logar do ponto M representa ao mesmo tempo duas funcções inversas: a funcção y de x e a funcção x de y.

XXV. Objecto e divisões do Curso de Trigonometria. —

A trigonometria tem por objecto *o estudo das funcções circulares*, e por fim especial a *resolução dos triangulos pelo calculo.*

Este curso está dividido em duas partes: a primeira contém os elementos da theoria das funcções circulares, a construcção das taboas trigonometricas e diversos exercicios analyticos; a segunda parte é a applicação das funcções circulares á resolução dos triangulos e a algumas outras questões de geometria.

Gerhes-Séllos-Rocha

Gerhes de Séllos Rocha
Barbacena, Minas, 1935.

PRIMEIRA PARTE

FUNCÇÕES CIRCULARES

CAPITULO I

LINHAS TRIGONOMETRICAS

§ I. — Arcos e angulos.

1. Medida dos angulos e dos arcos. — A medida de um angulo central é a mesma que a do arco comprehendido entre seus lados, comtanto que se tome para unidade de angulo o que corresponde á unidade de arco (*Geom.*)

A unidade de arco e, por conseguinte, a unidade de angulo é arbitraria.

Na pratica, toma-se por unidade de arco a quarta parte da circumferencia, ou o *quadrante*; ou então, a 360ª parte da circumferencia, ou o *grão*. Por isso os angulos tambem podem ser expressos de dois modos: em angulos rectos ou fracções de angulos rectos, ou então em grãos minutos e segundos. Em todo caso, passa-se facilmente de uma a outra d'essas medidas.

Em trigonometria, convém muitas vezes tomar por unidade, não uma parte aliquota da circumferencia, mas o arco cujo comprimento é igual ao raio do circulo considerado. É facil exprimir este arco em grãos, minutos e segundos: a circumferencia de raio R tem por comprimento $2\pi R$ e equivale a 360°; por conseguinte o arco de comprimento R equivale a

$$\frac{360° \times R}{2\pi R} = \frac{360°}{2\pi} = 57°17'44'',8.$$

2. Circulo trigonometrico. — Em trigonometria, toma-se sempre por unidade de comprimento o raio do circulo que se considera. Esse circulo, cujo raio é igual a 1, chama-se *circulo trigonometrico.*

A circumferencia do circulo trigonometrico, isto é, o arco de 360°, tem de comprimento 2π; a meia-circumferencia, ou arco de 180°, tem de comprimento π; o quadrante, ou arco de 90° tem de comprimento $\frac{\pi}{2}$.

3. Variação dos arcos e dos angulos.

Variações dos arcos. Um movel póde deslocar-se sobre uma circumferencia em dois sentidos oppostos : um d'elles chama-se *sentido positivo*, o outro *sentido negativo*.

Diz-se que um circulo está *orientado* quando se escolheu o sentido positivo sobre sua circumferencia.

No circulo trigonometrico, o sentido do movimento dos ponteiros de um relogio é sempre considerado como o sentido negativo; o sentido positivo é pois aquelle que é indicado pela flecha (fig. 8).

Chama-se *arco* todo caminho percorrido por um movel sobre a circumferencia, em um sentido determinado; quando mesmo esse movel tivesse dado a volta toda, ou mais vezes a volta da circumferencia.

O ponto de partida do movel chama-se *origem do arco*; seu ponto de chegada é o *extremo do arco*.

Um arco é *positivo* ou *negativo* segundo é elle percorrido no sentido positivo ou no sentido negativo adoptados.

Fig. 8.

O arco é uma variavel que póde tomar todos os valores, desde $-\infty$ até, $+\infty$.

Toma-se sobre o circulo trigonometrico um ponto fixo arbitrario A, a partir do qual contam-se todos os arcos e que por essa razão chama-se *origem dos arcos*; depois traçam-se os diametros rectangulares AA' BB', como indica a figura.

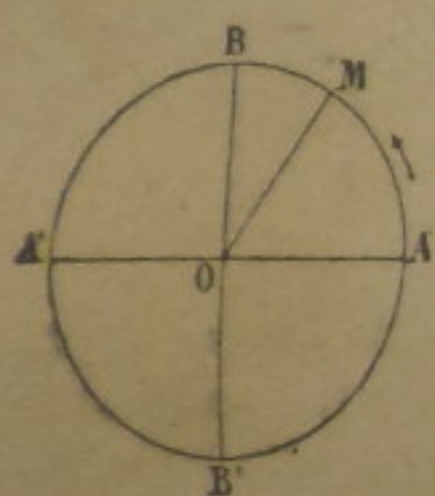
Suppõe-se depois que um movel M parte do ponto A e se move sobre a circumferencia no sentido positivo ABA'; o arco que elle descreve varia de um modo continuo. Elle é nullo quando o movel parte de A; depois elle cresce e passa pelos valores especiaes : $\frac{\pi}{2}$, π, $\frac{3\pi}{2}$ e 2π, quando o movel encontra os pontos B, A', B' e volta ao ponto A. Póde-se conceber que depois d'esta primeira volta o movel dá uma segunda, depois uma terceira e assim por diante. Assim, o arco cresce indefinidamente.

Se o movel M, partindo da origem A, move-se no sentido negativo A B'A', o arco percorrido é negativo; elle cresce ainda indefinidamente em valor absoluto e passa pelos valores especiaes :

$$-\frac{\pi}{2}, -\pi, -\frac{3\pi}{2}, -2\pi, \text{etc., até } -\infty.$$

Cada vez que o ponto descrevendo M volta ao ponto A, elle percorreu um numero inteiro de circumferencias, isto é um arco que tem de comprimento $2k\pi$, k designando um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo.

Variações dos angulos. Emquanto o ponto M move-se indefinidamente sobre a circumferencia, o raio OM, movel com elle, gira ao redor do centro O e gera um angulo variavel AOM, que tem a mesma medida que o arco AM e ao qual se attribue o mesmo signal.

Aqui, o angulo não se acha mais sujeito, como em geometria, a ficar menor, do que dous rectos: elle poderá passar, tão bem como o arco, por todos os valores desde $-\infty$ até $+\infty$.

4. Arcos complementares. *Chamam-se arcos complementares dois arcos cuja somma algebrica é igual a 90° ou $\frac{\pi}{2}$.*

Se um arco tem por medida a, seu *complemento* tem por medida $\frac{\pi}{2} - a$.

Toma-se por *origem dos complementos* o ponto B, situado a 90° da *origem dos arcos*, e consideram-se os complementos como positivos no sentido do movimento dos ponteiros de um relogio. Com estas convenções, dois arcos complementares tendo por origens respectivas A e B terminam no mesmo ponto. Assim o arco AM tem por complemento BM; segundo que o arco AM é inferior ou superior a 90°, seu complemento BM é positivo ou negativo.

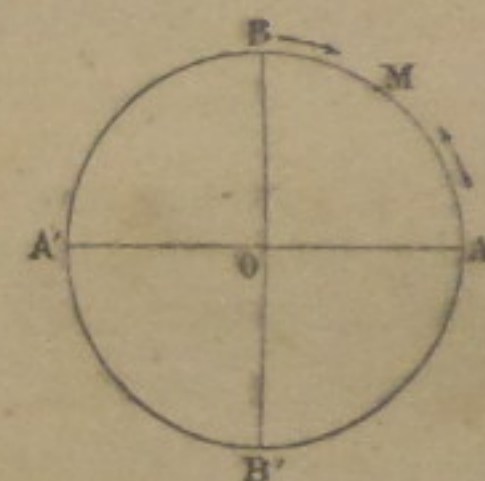



Fig. 9.

Observação. Para diante, a menos que os arcos considerados sejam os complementos de outros arcos dados, supporemos sempre, salvo indicações contrarias, que todos os arcos têm uma mesma origem A.

5. Arcos supplementares. *Chamam-se arcos supplementares dois arcos cuja somma é igual a π.*

Se um arco tem por medida a, seu *supplemento* tem por medida $\pi - a$.

Dois arcos supplementares de mesma origem A (fig. 10), são terminados em dois pontos M, M', situados sobre uma parallela ao diametro AA', e, por conseguinte, symetricos um do outro em relação ao diametro BB'.

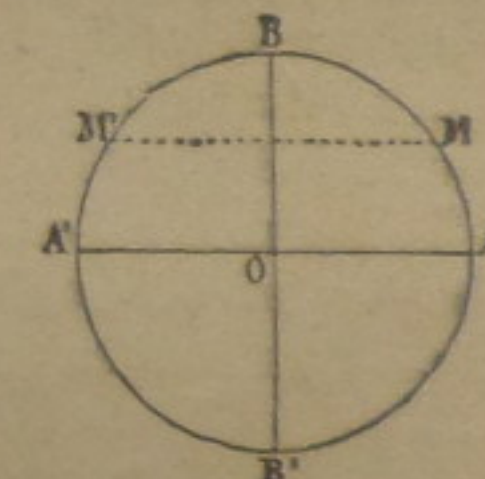



Fig. 10.

6. Formulas geraes de arcos tendo uma mesma origem e extremidades associadas.

1° Arcos que têm a mesma origem e a mesma extremidade.

Todos os arcos a tendo a mesma origem e a mesma extremidade estão comprehendidos na formula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer positivo, negativo ou nullo.

Um arco a, do qual se conhece sómente a origem A e a extremidade M, não está bem determinado : é uma qualquer das direcções podendo conduzir um movel sobre a circumferencia, do ponto A ao ponto M.

Ora, é evidente que quando se conhece um qualquer d'esses arcos, α, d'elle podemos deduzir todos os outros : basta ajuntar a este um numero qualquer de circumferencias inteiras, positivas ou negativas, isto é, um arco $k.2\pi$, k indicando um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo.

Por conseguinte todos os arcos de mesma origem e de mesma extremidade que o arco α estão comprehendidos na formula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

o numero inteiro k podendo ser positivo, negativo ou nullo.

Observação. O arco α tendo por origem A e por extremo M, todo arco a da mesma origem e da mesma extremidade é a somma algebrica de dois arcos : um $2k\pi$, partindo da origem A, comprehendendo um numero inteiro de circumferencias, e tornando a trazer o movel ao ponto A; o outro, igual a α, que conduz depois o movel do ponto A ao ponto M.

2º Arcos que têm a mesma origem, tendo seus extremos sobre uma mesma parrallela ao diametro que passa pela origem.

Todos os arcos a, *tendo uma mesma origem e extremos collocados sobre uma mesma parallela ao diametro que passa pela origem, estão comprehendidos nas duas fórmulas*

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha \qquad \text{(E)}$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k *um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.*

Sejam A a origem commum e M, M′ os extremos de uma corda parallela ao diametro AA′, isto é, dois pontos symetricos em relação ao diametro BB′ (fig. 11).

Se o arco α se termina no ponto M, por exemplo, seu supplemento termina no ponto M′ (nº 5). Logo, em virtude da fórmula (D), todos os arcos terminados em M estão comprehendidos na fórmula

$$a = 2k\pi + \alpha$$

e todos os arcos terminados em M′ estão comprehendidos na fórmula

$$a = 2k\pi + (\pi - \alpha)$$

ou

$$a = (2k+1)\pi - \alpha$$

k designando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

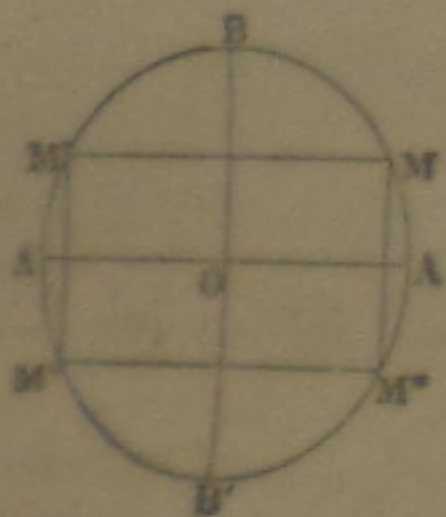



Fig. 11.

Observação. — Se α é um dos arcos terminados em M, todo arco terminando no ponto M′ é a somma algebrica de dois arcos : um $(2k+1)\pi$, comprehendendo um numero impar de meias-circumferencias, e conduzindo da origem A ao ponto A′ diametralmente opposto; o outro $(-\alpha)$ conduzindo d'esse ponto A′ ao extremo M′.

3º Arcos que têm a mesma origem, e os seos extremos sobre um mesmo diametro.

Todos os arcos a, *tendo origem identica e extremos situados sobre o mesmo diametro, estão comprehendidos na fórmula*

$$a = k\pi + \alpha \qquad \text{(F)}$$

α indicando um qualquer d'esses arcos e k *um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.*

Sejam M, M′ dois pontos diametralmente oppostos, isto é, dois pontos symetricos em relação ao centro do circulo trigonometrico (fig. 11).

Os arcos geometricos AM, A′M″, sendo iguaes entre si, um arco α, indo do ponto A ao ponto M, poderá tambem conduzir do ponto A′ ao ponto M″.

Assim, qualquer arco a, de origem A e terminado em um dos pontos M ou M″, póde ser considerado como sendo a somma algebrica de dois arcos : um, partindo da origem A, e terminando em A ou em A′; o outro, egual a α, conduzindo depois de A a M ou de A′ a M″.

Ora, o primeiro d'esses arcos não póde comprehender senão um numero inteiro de meias circumferencias positivas ou negativas; póde ser representado por $k\pi$.

Por conseguinte qualquer arco a terminado em M ou em M″ acha-se na formula

$$a = k\pi + \alpha$$

k indicando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

4º Arcos que têm a mesma origem, com seus extremos sobre a mesma perpendicular ao diametro que passa pela origem.

Todos os arcos a, *tendo a mesma origem e extremidades sobre a mesma perpendicular ao diametro que passa pela origem, estão comprehendidos na fórmula :*

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

α sendo um qualquer d'esses arcos e k *um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.*

Sejam M, M‴ os extremos de uma corda perpendicular a AA′, isto é dois pontos symetricos em relação a esse diametro (fig. 11).

Os arcos geometricos AM, AM‴ sendo iguaes, se um arco α se estende do ponto A ao ponto M, o arco $-\alpha$ ha de se estender do ponto A ao ponto M‴.

Assim, todo arco A, tendo por origem A e por extremo um dos pontos M ou M‴, póde ser considerado como sendo a somma algebrica de dois arcos : um, partindo de A e voltando ao ponto A; o outro, egual a $+\alpha$ ou a $-\alpha$ e conduzindo do ponto A ao ponto M ou ao ponto M‴.

Ora, o primeiro d'esses arcos não póde ser senão um numero inteiro de circumferencias positivas ou negativas, isto é, um arco tendo de extensão $2k\pi$.

Por conseguinte todo o arco a terminado em M ou M‴ acha-se comprehendido na fórmula

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

k indicando um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

§ II. — Das funcções circulares.

As funcções circulares, denominadas tambem *relações trigonometricas* ou *linhas trigonometricas*, são seis, que vem a sêr: o seno, a tangente, a secante, o coseno, a cotangente e a cosecante. Para abreviar escreve-se: sen, tg, sec, cos, cotg, cosec.

As funcções circulares de um arco são os numeros que medem certos segmentos de recta, ligados a esse arco, quando se toma o raio do arco como unidade de comprimento.

As funcções circulares de um angulo são identicas á do arco que tem a mesma medida que esse angulo.

7º Relações trigonometricas. — Dado um angulo AOM, descreve-se do seu vertice como centro uma circumferencia sobre a qual elle intercepta um arco AM.

Sejam A a origem do arco AM e M seu extremo; tracemos OM e os diametros rectangulares AA' e BB'.

Chama-se SENO *de um arco a relação ao raio d'este arco, da perpendicular baixada da extremidade do arco sobre o diametro que passa pela origem.*

Assim, o seno do arco AM ou do angulo AOM é a relação $\frac{MP}{OA}$.

Fig. 12.

Chama-se TANGENTE *de um arco a relação ao raio d'esse arco, da perpendicular levantada na extremidade do raio tirada pela origem e comprehendida entre essa origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.*

Assim, a tangente do arco AM ou do angulo AOM é a relação $\frac{AT}{OA}$.

Chama-se SECANTE *de um arco a relação ao raio d'este arco da recta que une o centro á extremidade da tangente.*

Assim, a secante do arco AM ou do angulo AOM é a relação $\frac{OT}{OA}$.

Chama-se COSENO, COTANGENTE *e* COSECANTE *de um arco, o seno, a tangente e a secante do complemento d'esse arco.*

Assim, o coseno do arco AM é a relação $\frac{MQ}{OB}$, MQ sendo a perpendicular baixada do extremo do arco sobre o diametro que passa pela origem dos complementos.

A cotangente do arco AM é a relação $\frac{BS}{OB}$, BS sendo a perpendicular levantada na extremidade do raio tirado da origem dos complementos e comprehendida entre essa origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.

A cosecante do arco AM é a relação $\frac{OS}{OB}$, OS sendo a distancia do centro á extremidade da cotangente.

Linhas trigonometricas. — Convenciona-se uma vez por todas tomar por unidade de comprimento o raio OA do circulo considerado. Portanto as seis relações trigonometricas do arco AM ou do angulo AOM reduzem-se aos numeros que medem seus numeradores. Esses numeradores são segmentos de rectas que tomam o nome de *linhas trigonometricas*.

As definições que precedem pódem pois ser substituidas pelas seguintes:

O SENO *de um arco é o comprimento da perpendicular baixada da extremidade de um arco sobre o diametro que passa pela outra extremidade.*

A TANGENTE *de um arco é o segmento da tangente tirada pela origem do arco, comprehendido entre essa origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.*

A SECANTE *de um arco é o segmento de uma recta comprehendido entre o centro do arco e a extremidade da tangente.*

O COSENO *de um arco é a distancia da extremidade do arco ao diametro que passa pela origem dos complementos*, ou antes, por causa do rectangulo OPM, *o coseno é a distancia do centro ao pé do seno.*

A COTANGENTE *é o segmento da tangente tirada ao circulo á origem dos complementos, comprehendido entre essa origem e o prolongamento do raio que passa pela extremidade do arco.*

A COSECANTE *é a distancia do centro á extremidade da cotangente.*

Observação I. — O coseno, a cotangente e a cosecante de um arco, que não são mais do que o seno, a tangente e a secante do complemento d'esse arco, são denominados por essa razão linhas ou funcções *complementares.*

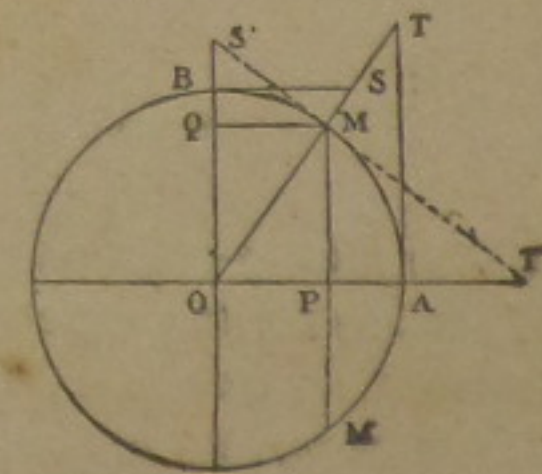
Observação II. — O ponto A sendo a origem dos arcos e B a origem dos complementos, todos os senos são parallelos ao diametro BB', e todos os cosenos são parallelos ao diametro AA'. Eis porque o diametro AA' chama-se *eixo dos cosenos*, e o diametro BB' *eixo dos senos.*

As tangentes são parallelas ao eixo dos senos, e as cotangentes são parallelas ao eixo dos cosenos.

Observação III. — É util modificar as definições da secante e da cosecante, de modo que se possa contar tambem estas duas ultimas linhas sobre as direcções rectangulares OA, OB.

Fig. 13.

A tangente ao circulo traçada pela extremidade M do arco, encontra a direcção OA em um ponto T' e a direcção OB em um ponto S'.

Os triangulos iguaes OAT, OMT' e OBS, OMS' mostram que a secante OT se transporta em OT' e a cosecante OS em OS'.

Assim, a SECANTE *de um arco é o segmento da recta AA', comprehendido entre o centro do circulo e a tangente traçada á extremidade do arco.*

A COSECANTE *é o segmento da recta BB' comprehendido entre o centro do circulo e a tangente traçada á extremidade do arco.*

8. As linhas trigonometricas de um arco em cada um dos quadrantes. — As figuras seguintes indicam as seis linhas

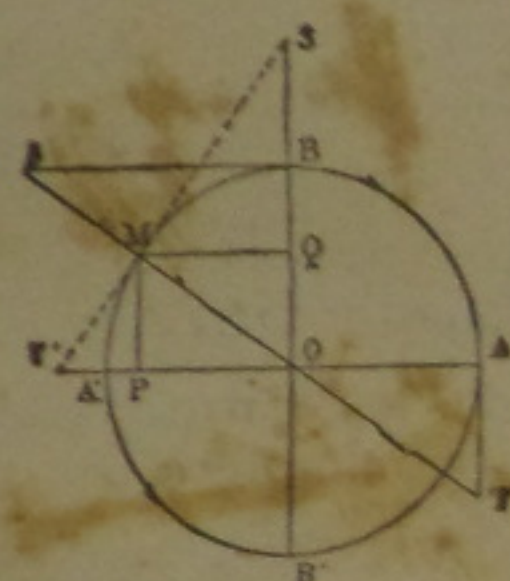



Fig. 14.

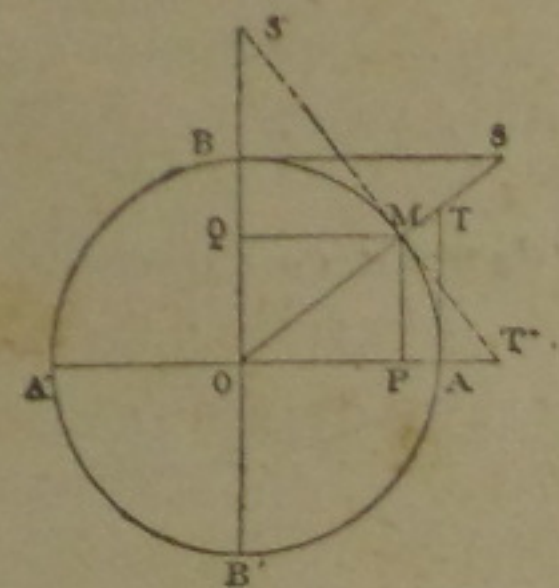



Fig. 15.

trigonometricas de um arco AM $=a$, cuja extremidade M cahe successivamente no 1°, no 2°, no 3° e no 4° quadrante.

Temos $\operatorname{sen} a = MP$, $\operatorname{tg} a = AT$, $\sec a = OT$ ou OT'
$\cos a = OP$, $\cot a = BS$, $\operatorname{cosec} a = OS$ ou OS'.

9. Signaes das linhas trigonometricas. — Toda linha trigonometrica sendo um segmento de recta perpendicular a um dos eixos rectangulares OA, OB, e tendo sua origem sobre esse eixo, attribue-se-

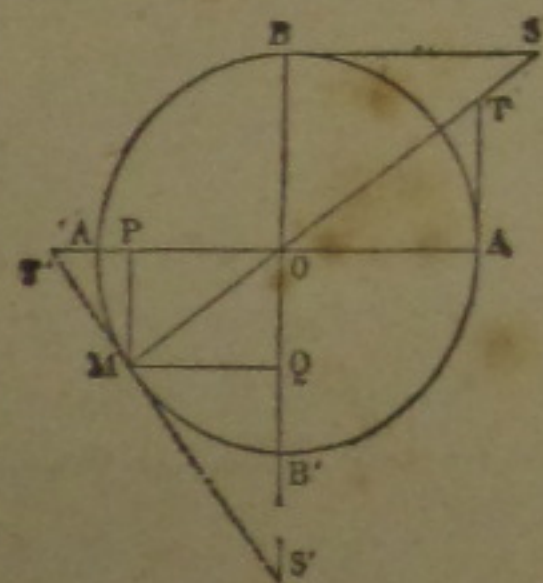



Fig. 16.

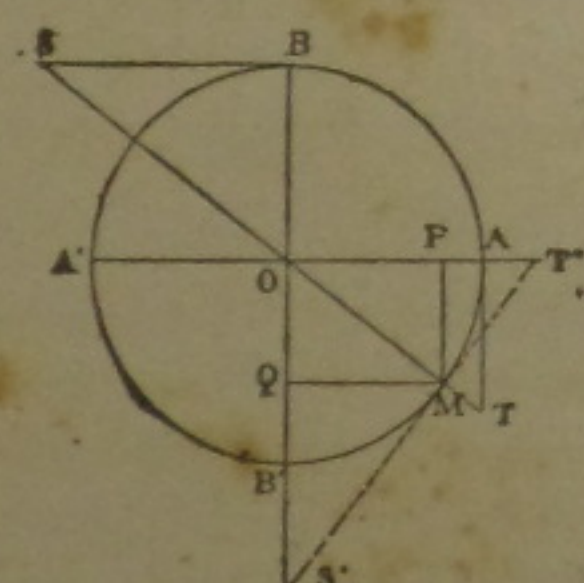



Fig. 17.

lhe o signal + ou o signal — segundo as seguintes convenções geraes :

Todo segmento perpendicular ao diametro B'B é positivo á direita d'esse diametro e negativo á esquerda.

Todo segmento perpendicular ao diametro A'A é positivo acima d'esse diametro e negativo a baixo.

Assim, o *seno* de um arco é positivo quando esse arco termina no 1° ou no 2° quadrante, e negativo quando o arco termina no 3° ou no 4° quadrante.

A *tangente* é positiva no 1° e no 3° quadrante, negativa no 2° e no 4° quadrante.

O *coseno* é positivo no 1° e no 4° quadrante, negativo no 2° e no 3° quadrante.

A *secante* de um arco tem sempre o mesmo signal que seu coseno; a *cotangente* tem o mesmo signal que a tangente, a *cosecante* tem o mesmo signal que o seno

As figuras seguintes indicam o signal de cada linha trigonometrica em cada um dos quadrantes (fig. 18).

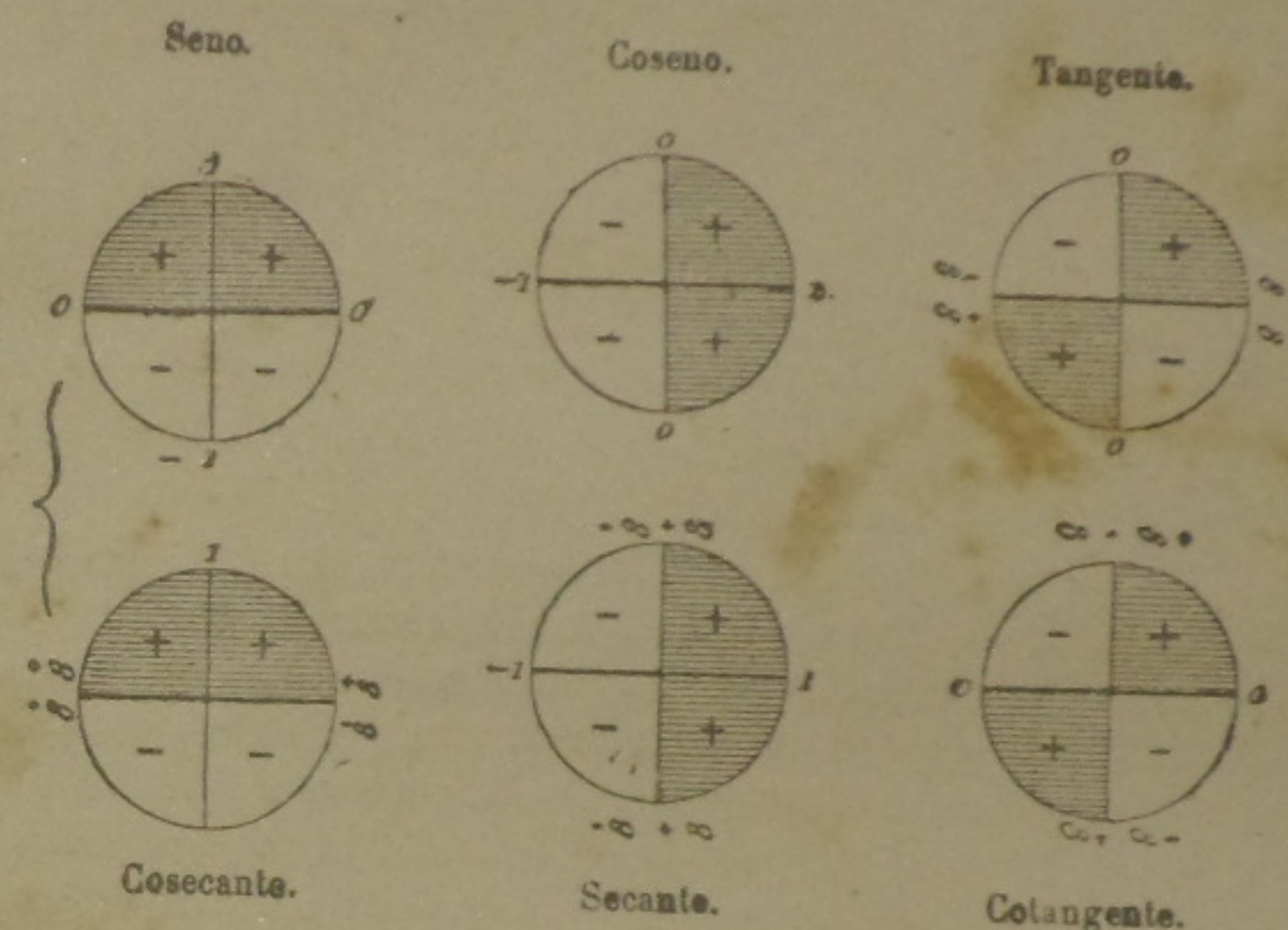



Fig. 18.

Observação I. Considerando a secante e a cosecante não em OT' e OS' sobre os eixos OA, OB, mas em suas posições OT e OS, vemos que cada uma d'essas linhas trigonometricas é *positiva quando ella passa pela extremidade do arco e negativa no caso contrario*, isto é, quando um de seus prolongamentos passa pela extremidade do arco.

Observação II. Quando um arco acaba no 1° quadrante, suas linhas trigonometricas são todas positivas.

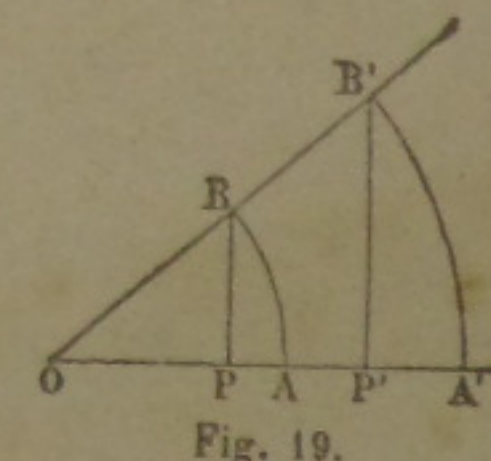
No 2° quadrante, todas as linhas são negativas, excepto o seno e a cosecante.

No 3° quadrante, todas as linhas são negativas, excepto a tangente e a cotangente.

No 4° quadrante, todas as linhas são negativas, excepto o coseno e a secante.

Fig. 19.

10. Theorema. *As relações trigonometricas de um angulo são independentes do raio do circulo considerado* (são determinadas logo que se conhece o angulo).

Seja um angulo AOM medido pelo arco AM $=a$, descripto do vertice O como centro com o raio OA $=1$, e por qualquer outro arco A'M' descripto do mesmo centro com um raio qualquer OA' $=$ R.

Baixemos sobre AO as perpendiculares MP, M'P'; os triangulos semelhantes OPM, OP'M dão;

$$\frac{MP}{M'P'} = \frac{OP}{OP'} = \frac{OM}{OM'}$$

isto é

$$\frac{\text{sen } a}{M'P'} = \frac{\cos a}{OP'} = \frac{1}{R}$$

d'onde

$$\text{sen } a = \frac{MP}{R} \text{ e } \cos a = \frac{OP'}{R}.$$

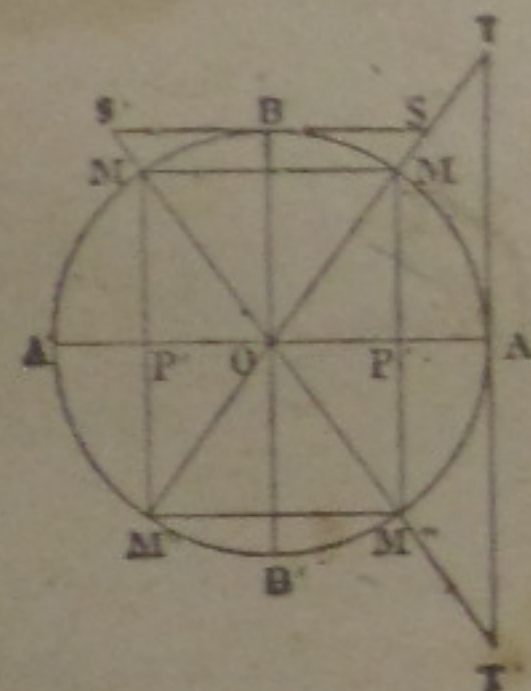
Por conseguinte, qualquer que seja o raio R, sen a é egual á razão $\frac{M'P'}{R}$, cos a é egual á razão $\frac{OP'}{R}$.

O mesmo se dá com todas as outras razões trigonometricas.

§ III. Relações entre as linhas trigonometricas de certos eixos.

No circulo trigonometrico inscrevamos um rectangulo MM'M''M''', que tenha os lados parallelos aos diametros rectangulares AA' e BB', isto é ao eixo dos cosenos e ao eixo dos senos. Um rectangulo d'esses póde ser denominado rectangulo trigonometrico.

Fig. 20.

Construindo as linhas trigonometricas dos arcos terminados em cada um dos quatro vertices M, M', M'', M''', verifica-se que as linhas que têm o mesmo nome são iguaes em valor absoluto. Entre as numerosas consequencias que decorrem d'esta observação, as seguintes são especialmente uteis a reter.

11. Arcos que differem de um numero inteiro de circumferencias. Dois arcos da mesma origem, que differem de um numero inteiro de circumferencias, terminam no mesmo ponto (nº 6, 1º); elles têm, pois, as mesmas linhas trigonometricas.

Quaesquer que sejam o arco a e o numero inteiro k, podemos escrever :

$$\begin{aligned} \text{sen }(2k\pi + a) &= \text{sen } a & \text{cosec }(2k\pi + a) &= \text{cosec } a \\ \cos(2k\pi + a) &= \cos a & \sec(2k\pi + a) &= \sec a \\ \text{tg }(2k\pi + a) &= \text{tg } a & \text{cotg }(2k\pi + a) &= \text{cotg } a \end{aligned}$$

Assim, *quando se ajunta ou se supprime n'um arco um numero qualquer de circumferencias, suas linhas trigonometricas conservam os mesmos valores absolutos affectos com os mesmos signaes.*

12. Arcos supplementares. Dois arcos supplementares AM, AM', têm suas extremidades symetricas em relação ao diametro BB'; suas linhas trigonometricas são pois iguaes e de signaes contrarios, excepuando o seno MP = M'P' e a cosecante OS = OS' que são iguaes e de mesmo signal. De modo que temos :

$$\begin{aligned} \text{sen }(\pi - a) &= \text{sen } a, & \text{cosec }(\pi - a) &= \text{cosec } a \\ \cos(\pi - a) &= -\cos a, & \sec(\pi - a) &= -\sec a \\ \text{tg }(\pi - a) &= -\text{tg } a, & \text{cotg }(\pi - a) &= -\text{cotg } a. \end{aligned}$$

Por conseguinte, *se substituimos um arco por seu supplemento, as linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando o seno e a cosecante.*

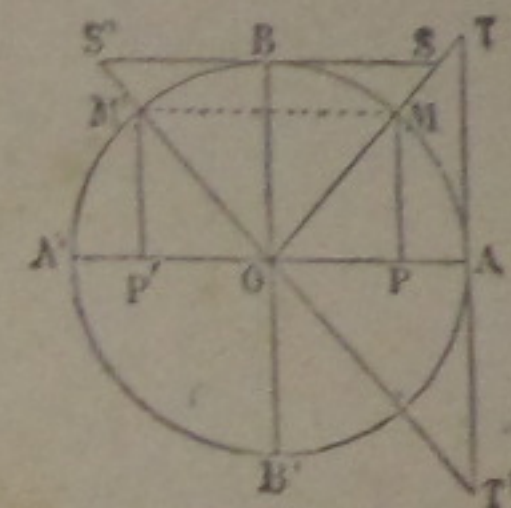



Fig. 21.

Nas applicações, frequentemente temos de nos lembrar que *dois angulos supplementares têm senos iguaes, com o mesmo signal, porém cosenos iguaes com signaes contrarios.*

13. Arcos que differem d'uma semi-circumferencia. Dois arcos AM e AM' que differem de uma semi-meia circumferencia têm suas extremidades diametralmente oppostas; suas linhas trigonometricas são pois iguaes e de signaes contrarios, exceptuando a tangente AT e a cotangente BS, que são iguaes e têm o mesmo signal.

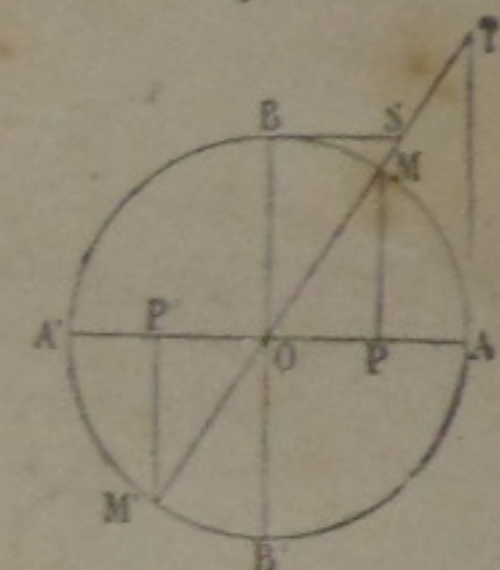



Fig. 22.

Temos pois :

$$\begin{aligned} \text{sen }(\pi + a) &= -\text{sen } a, & \text{cosec }(\pi + a) &= -\text{cosec } a \\ \cos(\pi + a) &= -\cos a, & \sec(\pi + a) &= -\sec a \\ \text{tg }(\pi + a) &= \text{tg } a, & \text{cotg }(\pi + a) &= \text{cotg } a \end{aligned}$$

Por conseguinte, *se ajuntarmos ou tirarmos a um arco uma semi-circumferencia, as linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando a* tangente *e a* cotangente.

14. Arcos iguaes com signaes contrarios. Dois arcos *iguaes e com signaes contrarios*, AM e AM', têm suas extremidades symetricas em relação ao diametro AA'; suas linhas trigonometricas são pois iguaes em valor absoluto e com signaes contrarios, exceptuando o coseno OP e a secante OT = OT', que são iguaes e têm o mesmo signal.

Assim póde-se escrever :

$$\begin{aligned} \text{sen }(-a) &= -\text{sen } a, & \text{cosec }(-a) &= -\text{cosec } a \\ \cos(-a) &= \cos a, & \sec(-a) &= \sec a \\ \text{tg }(-a) &= -\text{tg } a. & \text{cotg }(-a) &= -\text{cotg } a \end{aligned}$$

Por conseguinte, *se mudarmos o signal de um arco, as linhas trigonometricas conservam seu valor absoluto e mudam de signal, exceptuando o* coseno *e a* secante.

Observação. Á vista do que precede, dado um arco qualquer, existe

sempre um arco do primeiro quadrante e só um, tendo as mesmas linhas trigonometricas que elle, em valor absoluto.

Assim, abstracção feita dos signaes, as linhas trigonometricas tomam no primeiro quadrante todos os valores de que são susceptiveis; de modo que se conhecessemos as linhas trigonometricas de todos os arcos comprehendidos entre 0° e 90°, d'ellas poderiamos deduzir os valores e os signaes das linhas trigonometricas de todos os outros arcos.

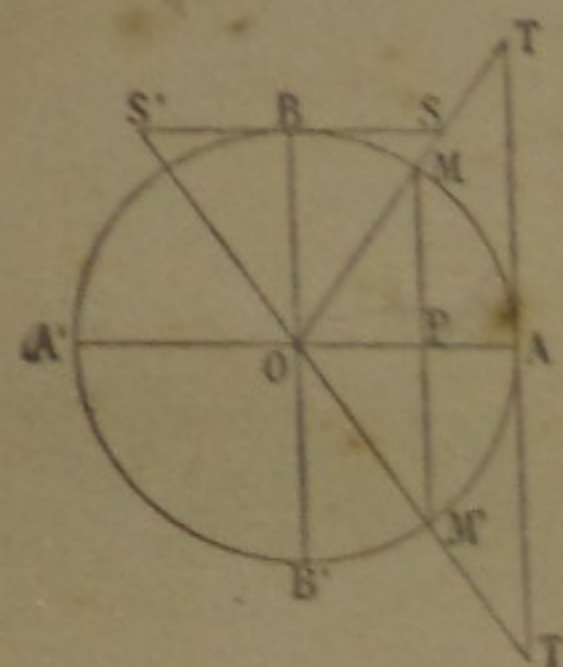



Fig. 23.

15. Reduzir um arco ao primeiro quadrante.

Reduzir um arco ao primeiro quadrante, é achar o arco comprehendido entre 0° e 90° cujas linhas trigonometricas são iguaes em valor absoluto ás do arco dado.

Para reduzir ao primeiro quadrante um arco dado a, se esse arco excede 360°, divide-se primeiramente por 360; o que dá um quociente inteiro q e um resto α inferior a 360.

O quociente indica quantas circumferencias inteiras encerra o arco dado; o resto mostra em que quadrante esse arco termina e, por consequencia, com que signaes estão affectas suas linhas trigonometricas.

Se o resto α é inferior a 90°, é o arco procurado, cujas linhas trigonometricas são iguaes em valor absoluto ás de a.

Se α é um arco do 2° quadrante, diminue-se de π : a differença $\pi - \alpha$ é o arco que se procura.

Se α é um arco do 3° quadrante, tira-se-lhe π : o excesso $\alpha - \pi$ responde á questão.

Se α é um arco do 4° quadrante, diminue-se de 2π : a differença $2\pi - \alpha$ é o arco que se procura.

Exemplos. — Temos:

1° $1860° = 360° \times 5 + 60°$

2° $1575° = 360° \times 4 + 135°$ e $\pi - 135° = 45°$

3° $930° = 360° \times 2 + 210°$ e $210° - \pi = 30°$

4° $705° = 360° + 345°$ e $2\pi - 345° = 15°$

Assim as linhas trigonometricas dos arcos

1860°, 1575°, 930°, e 705°,

são respectivamente iguaes, em valor absoluto, aos dos arcos

60°, 45°, 30° e 15°.

16. Arcos que differem de $\frac{\pi}{2}$.

Para obter as linhas trigonometricas do arco $\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$, em funcção

das do arco a, basta exprimil-as primeiramente em funcção das linhas trigonometricas do arco $(-a)$, e depois substituir estas em funcção das do arco a.

Os arcos $\left(a + \frac{\pi}{2}\right)$ e $(-a)$ sendo complementares, temos successivamente (n^os^ 7 e 14):

$$\text{sen}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(-a) = \cos a$$

$$\cos\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}(-a) = -\text{sen}\, a$$

$$\text{tg}\left(a + \frac{\pi}{2}\right) = \text{cotg}(-a) = -\text{cotg}\, a, \text{etc.}$$

Por conseguinte, *se dois arcos differem de $\frac{\pi}{2}$, as linhas trigonometricas de um são iguaes em valor absoluto ás linhas complementares do outro; e esses valores iguaes têm signaes contrarios, excepto o seno e a cosecante do maior arco e o coseno e a secante do menor, que são quatro linhas trigonometricas com o mesmo signal.*

§ IV. — Variações das linhas trigonometricas.

Estudemos as variações de cada uma das linhas trigonometricas do arco a quando elle passa, crescendo, por todos os estados de grandeza.

Supporemos que esse arco é gerado por um movel M que descreve a circumferencia no sentido positivo.

Todas as vezes que esse movel passa no mesmo ponto da circumferencia, as seis linhas trigonometricas do arco retomam os mesmos valores (n° 11).

A cada volta de circumferencia, as seis linhas trigonometricas tornam a tomar quatro vezes os mesmos valores absolutos, para as quatro posições do ponto M situadas nos vertices do mesmo rectangulo trigonometrico (fig. 20).

17. Seno e coseno.

1° Variações do seno. — Se a extremidade do arco parte da origem e, indo no sentido positivo, descreve os quatro quadrantes,

No 1° quadrante, o seno cresce de 0 a +1, passando por todos os valores intermediarios.

No 2° quadrante, o seno decresce de +1 a 0, retomando em sentido inverso todos os valores precedentes.

No 3° quadrante, o seno torna-se negativo e decresce de 0 a —1.

No 4° quadrante, o seno fica negativo e cresce de —1 a 0.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto B ou do ponto B′, o seno tem dois valores iguaes e com o mesmo signal.

Para duas posições de M equidistantes do ponto A ou do ponto A′, os senos são iguaes e de signaes contrarios.

Cada vez que a extremidade M faz uma volta de circumferencia, o seno muda duas vezes de signal passando por 0, e toma duas vezes cada um dos valores comprehendidos entre seu *maximo* $+1$ e seu *minimo* -1.

Periodicidade do seno. — O seno não muda quando se ajunta ou se tira ao arco um numero inteiro qualquer de circumferencias, temos

$$\text{sen}\,(a+2k\pi)=\text{sen}\,a.$$

Logo, *o seno é uma funcção periodica do arco, e a amplitude do seu periodo é* 2π (nº XXII).

Curva figurativa das variações do seno. — Sobre dois eixos rectangulares Ox e Oy, tomemos como abscissas os valores do arco a e como ordenadas os valores correspondentes do seno a (nº XXIV).

Por exemplo, desenvolvendo o arco OM obtem-se a abscissa OM′, e seu seno PM dá a ordenada correspondente $M'S=PM$.

Quando o ponto M descreve a circumferencia, o ponto M′ desloca-se no eixo Ox, e o ponto S gera a curva figurativa das variações do seno. Essa curva se prolonga indefinidamente nos dois sentidos da recta Ox,

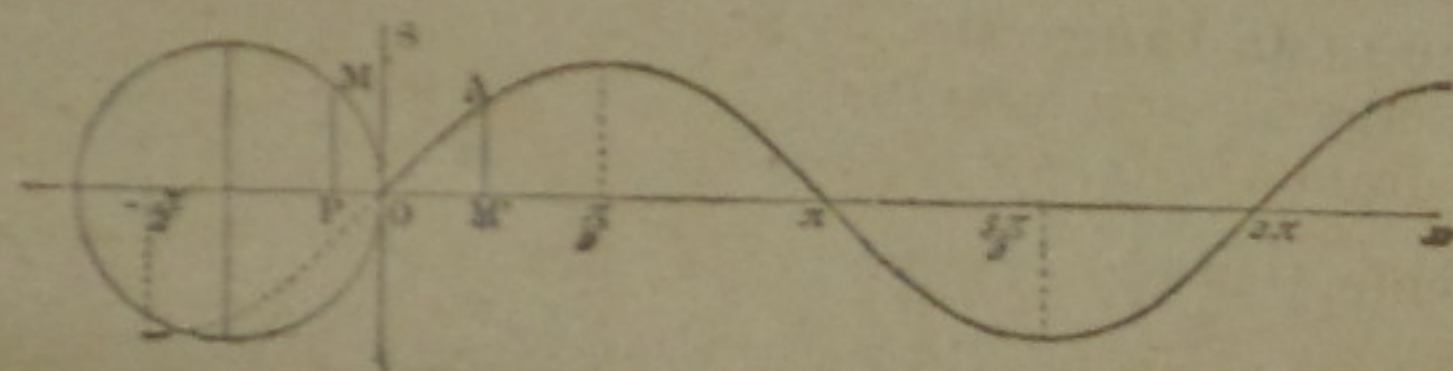



Fig. 24. — Variações do seno.

que ella corta em uma infinidade de pontos equidistantes; a curva é symetrica em relação a cada um dos pontos situados sobre Ox e em relação a cada uma das rectas passando pelas ordenadas maximas e minimas.

2º Variações do coseno. — Se a extremidade do arco parte da origem e descreve, no sentido positivo, cada um dos quadrantes:

No 1º quadrante, o coseno decresce de $+1$ a 0 passando por todos os valores intermediarios.

No 2º quadrante, o coseno decresce de 0 a -1.

No 3º e no 4º quadrante, o coseno primeiramente cresce de -1 a 0, depois de 0 a $+1$; retomando assim, em ordem inversa, todos os valores do coseno no 2º e no 1º quadrante.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto A ou do ponto A′, os cosenos são iguaes e têm o mesmo signal.

Para duas posições de M equidistantes do ponto B ou do ponto B′ os cosenos são iguaes e de signaes contrarios.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, o coseno muda duas vezes de signal passando por 0, e toma duas vezes cada um dos valores comprehendidos entre seu *maximo* $+1$ e seu *minimo* -1.

Periodicidade do coseno. — Qualquer que seja o valor do arco a, temos para todo valor do numero inteiro k

$$\cos\,(a+2k\pi)=\cos\,a.$$

Logo, *o coseno é uma funcção periodica do arco, e a amplitude de seu periodo é* 2π.

Curva figurativa das variações do coseno. — Sobre dois eixos rectangulares tomem-se para abscissas os comprimentos dos arcos e para ordenadas os valores correspondentes do coseno.

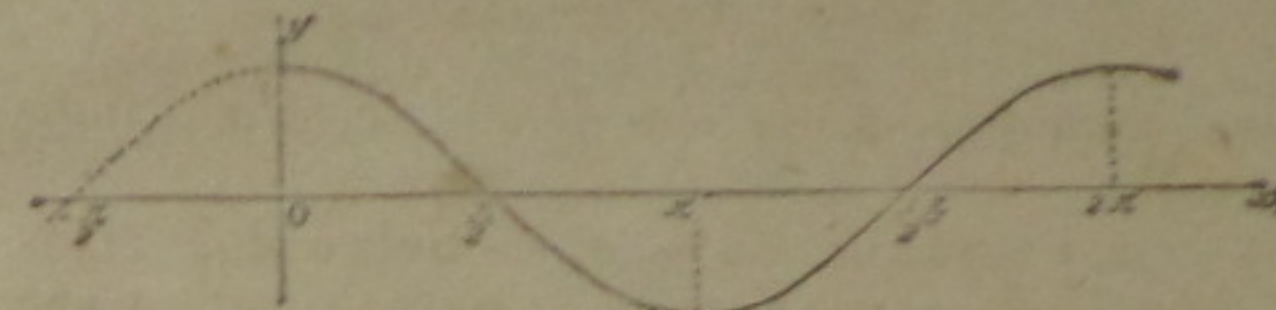



Fig. 25. — Variações do coseno.

A curva que passa pelas extremidades de todas as ordenadas, assim obtidas, representa as variações do coseno.

18. Tangente e cotangente.

1º Variações da tangente. — Se a extremidade do arco parte da origem e descreve a circumferencia no sentido positivo:

No 1º quadrante, a tangente é positiva, ella parte de 0 e augmenta indefinidamente. Quando o arco a tende para $\frac{\pi}{2}$ com valores crescentes, sua tangente tende para $+\infty$.

No 2º quadrante a tangente é negativa; ella retoma os mesmos valores absolutos em ordem inversa; assim, ella cresce de $-\infty$ a 0. Vemos que quando a extremidade M passa por B, seguindo o sentido positivo, a tangente passa de $+\infty$ a $-\infty$.

No 4º assim como no 2º, a tangente cresce de $-\infty$ a 0.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto B ou do ponto B′, as tangentes são iguaes e de signaes contrarios.

Para duas posições diametralmente oppostas do ponto M, as tangentes são iguaes e têm o mesmo signal.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, a tangente passa duas vezes seguidas pela serie completa dos valores de $-\infty$ a $+\infty$.

Periodicidade da tangente. — A tangente de um arco não muda quando se ajunta ou se tira a esse arco um numero inteiro de semi-circumferencias.

Temos $$\text{tg}\,(a+k\pi)=\text{tg}\,a$$

Logo, *a tangente é uma funcção periodica do arco, e a amplitude de seu periodo* é egual a π (nº XXII).

2º Variações da cotangente.

No 1º quadrante, a cotangente decresce de $+\infty$ a 0.

No 2º quadrante, ella decresce de 0 a $-\infty$.

No 3º quadrante, ella decresce, como no 1º, de $+\infty$ a 0.

No 4º quadrante, como no 2º, ella decresce de 0 a $-\infty$.

De cada vez que a extremidade do arco dá a volta da circumferencia.

a cotangente passa duas vezes pela serie dos valores de $-\infty$ a $+\infty$; ella muda quatro vezes de signaes passando quer por 0, quer pelo infinito; emfim ella não admitte nem maximo nem minimo.

A cotangente é uma funcção periodica do arco, e a amplitude do seu periodo é igual a π.

Temos $\operatorname{cotg}(a+k\pi)=\operatorname{cotg} a$

Curvas figurativas das variações da tangente e da cotangente.

As variações da tangente e da cotangente são representadas pelas figuras seguintes.

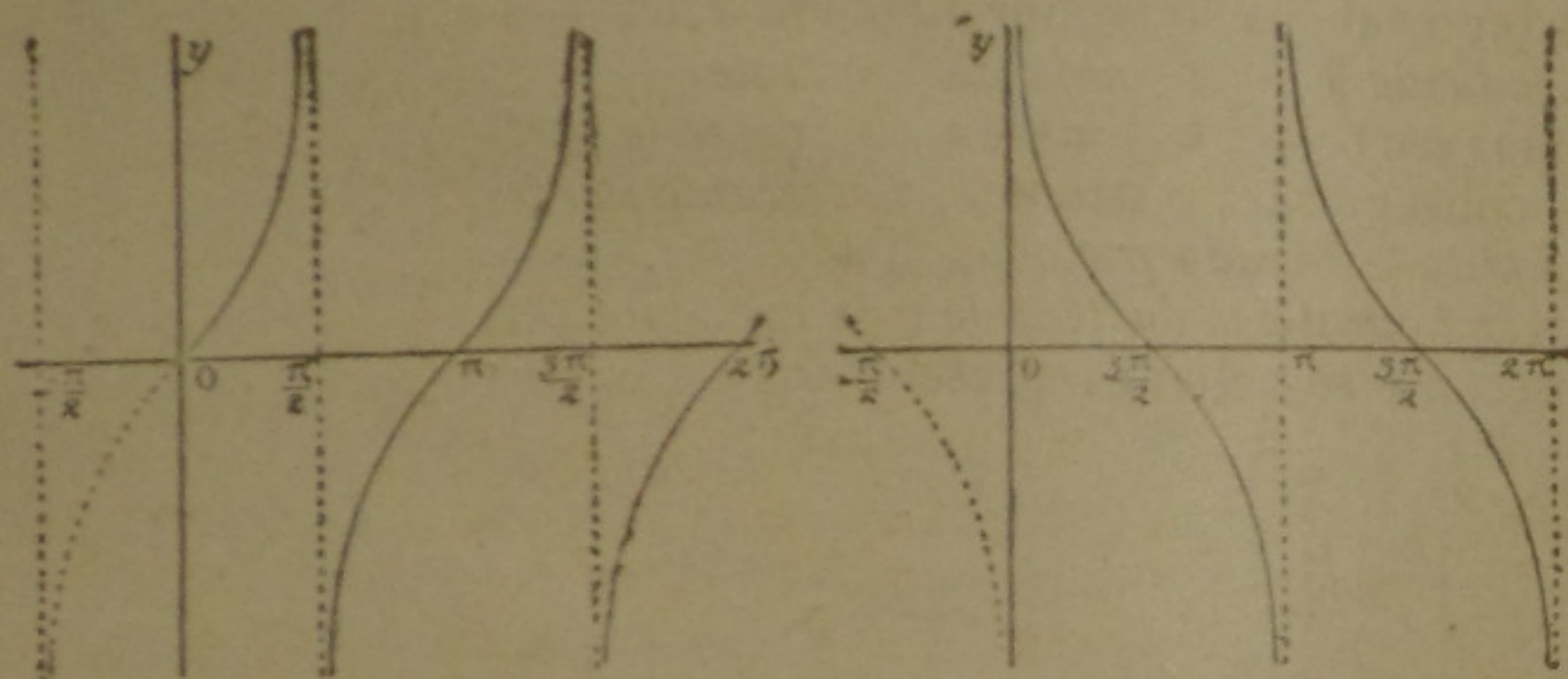
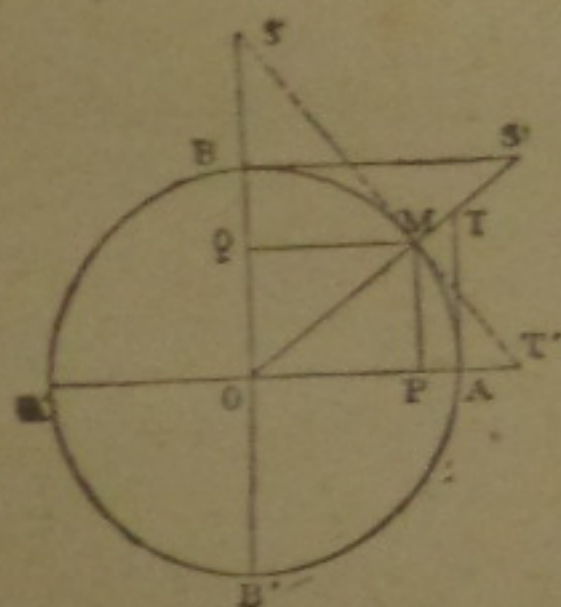



Fig. 26. — Variações da tangente. Fig. 27. — Variações da cotangente.

Fig. 28.

19. Secante e cosecante.

Para seguir facilmente as variações d'estas duas linhas trigonometricas, basta lembrar-se que a secante e a cosecante são os segmentos OT′ e OS′ interceptados sobre os eixos rectangulares OA, O,B pela tangente ao circulo trigonometrico, cujo ponto de contacto coincide com a extremidade do arco. Quando esse ponto M descreve a circumferencia, a tangente TS′ gira sobre o circulo, e os pontos T′, S′, movem-se sobre os eixos.

1° Variações da secante.

No 1° quadrante, a secante cresce de 1 a $+\infty$.
No 2° quadrante, a secante cresce de $-\infty$ a -1.
No 3° quadrante, ella decresce de -1 a $-\infty$.
No 4°, ella decresce de $+\infty$ a $+1$.

Para duas posições da extremidade do arco equidistantes do ponto A ou do ponto A′ as secantes são iguaes.

Para duas posições da extremidade do arco equidistantes do ponto B ou do ponto B′, as secantes são iguaes e de signaes contrarios.

Em cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade do arco, asecante muda duas vezes de signal passando pelo infinito, e ella passa duas vezes por cada um dos valores comprehendidos entre $+\infty$ e seu minimo $+1$, ou entre $-\infty$ e seu maximo -1.

2° Variações da cosecante.

No 1° quadrante, a cosecante decresce de $+\infty$ a $+1$.

No 2° quadrante, ella cresce de $+1$ a $+\infty$.
No 3° quadrante, ella cresce de $-\infty$ a -1.
No 4° quadrante, ella decresce de -1 a $-\infty$.

Para duas posições da extremidade M equidistantes do ponto B ou do ponto B′, as cosecantes são iguaes.

Para duas posições de M equidistantes do ponto A ou do ponto A′, as cosecantes são iguaes e de signaes contrarios.

A cada volta de circumferencia effectuada pela extremidade M, a cosecante muda duas vezes de signaes passando pelo infinito, e toma duas vezes todo valor não comprehendido entre -1 e $+1$.

Periodicidade da secante e da cosecante.

Temos $\sec(a+2k\pi)=\sec a$ e $\operatorname{cosec}(a+2k\pi)=\operatorname{cosec} a$.

Por conseguinte, *a secante e a cosecante são funcções periodicas do arco, e a amplitude de cada periodo é 2π.*

Curvas figurativas da secante e da cosecante. As variações da secante e da cosecante se acham representadas pelas curvas seguintes:

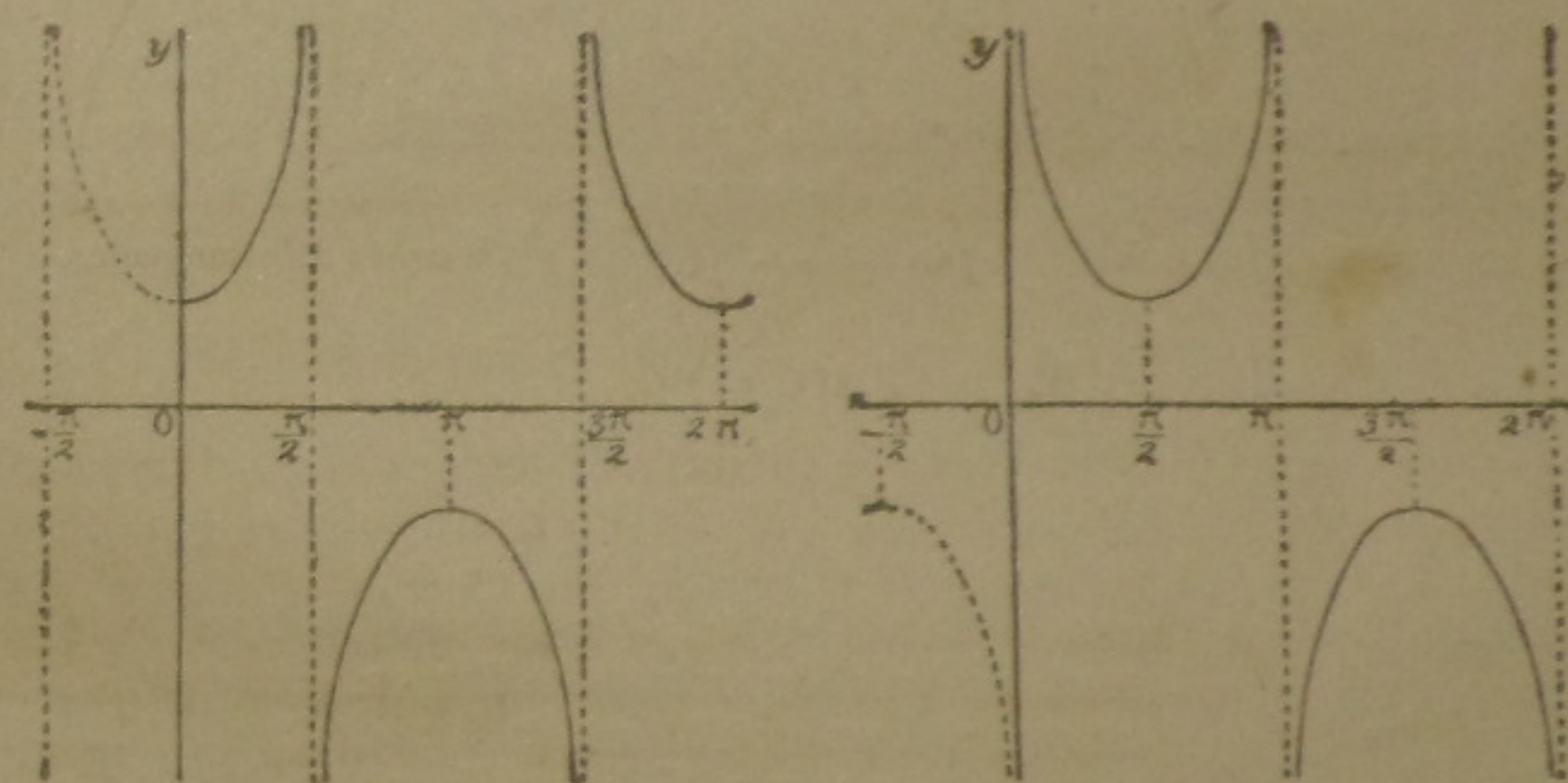



Fig. 29. — Variações da secante. Fig. 30. — Variações da cosecante.

Resumo. — O quadro seguinte indica o valor das seis linhas trigonometricas para cada um dos angulos.

$$0°, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$$

e o sentido de variação de cada uma d'essas linhas nos quatro quadrantes.

Arco a	0		$\frac{\pi}{2}$		π		$\frac{3\pi}{2}$		2π	Amplitude.
Seno a	0	cresce	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	2π
Cos a	1	decresce	0	decresce	-1	cresce	0	cresce	1	2π
Tang a	0	cresce	$\pm\infty$	cresce	0	cresce	$\pm\infty$	cresce	0	π
Cot a	∞	decresce	0	decresce	$\pm\infty$	decresce	0	decresce	$\pm\infty$	π
Sec a	1	cresce	$\pm\infty$	cresce	-1	decresce	$\pm\infty$	decresce	1	2π
Cosec a	∞	decresce	1	cresce	$\pm\infty$	cresce	-1	decresce	$\mp\infty$	2π

Observação. — Resulta do que precede :

1° *Qualquer numero positivo ou negativo póde representar uma tangente ou uma cotangente.*

2° *Só os numeros que não se acham comprehendidos entre* -1 *e* $+1$ *é que podem representar uma secante ou uma cosecante.*

3° *Os numeros pertencentes ao intervallo de* -1 *a* $+1$ *são os unicos que podem representar um seno ou um coseno.*

§ V. — Arcos tendo uma linha trigonometrica dada.

Um arco dado só tem uma linha trigonometrica de cada especie: pelo contrario, a uma linha trigonometrica dada corresponde um numero indefinido de arcos.

Propomo-nos exprimir, em funcção de um d'entre elles, todos os arcos tendo uma linha trigonometrica dada.

Deduziremos depois, das fórmulas obtidas, as condições para que dois arcos tenham senos iguaes, ou cosenos iguaes, ou tangentes iguaes, etc.

20. Fórmulas dos arcos tendo um seno dado ou uma cosecante dada. — *Todos os arcos tendo um seno dado ou uma cosecante dada estão comprehendidos nas duas fórmulas.*

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha \qquad \text{(E)}$$

α sendo um qualquer d'esses arcos e k *um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.*

1° Arcos tendo um seno dado. — Tomemos sobre o eixo do seno BB' um segmento OH igual em grandeza e em signal ao seno dado; depois, pelo ponto H, tracemos a corda MM' parallela ao diametro AA'.

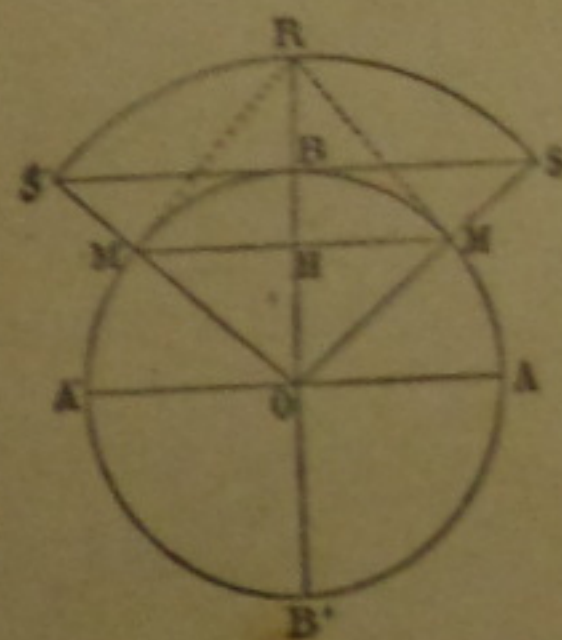



Fig. 31.

E evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por seno OH, e que são os unicos.

Assim *todos os arcos que têm o mesmo seno dado terminam sobre uma recta parallela ao diametro* AA'.

Portanto (nº 6, 2º), se designarmos um d'esses arcos por α, todos os outros podem ser deduzidos d'este por meio das fórmulas (E), nas quaes basta substituir k por um numero inteiro qualquer, positivo ou negativo.

2° Arcos tendo uma cosecante dada. — Tomemos sobre o eixo BB' um segmento OR igual em grandeza e em signal á cosecante dada; depois tracemos ao circulo as tangentes RM, RM'. Todos os arcos terminados em M ou em M' têm por cosecante OR, e são os unicos.

Obter-se-hiam tambem os pontos M e M' cortando a tangente SS' por um arco descripto do centro O com OR como raio; as rectas OS, OS' passam pelos pontos procurados.

Esses pontos M e M' são symetricos em relação ao diametro BB'. Logo

(nº 6, 2º), todos os arcos a tendo a cosecante dada se acham comprehendidos nas fórmulas (E), nas quaes α designa um qualquer d'esses arcos.

Condição para que dois arcos tenham senos eguaes.

Para que dois arcos tenham senos iguaes, e por consequencia cosecantes iguaes, é preciso e sufficiente que sua differença seja um numero par ou que a sua somma seja um numero impar de semi-circumferencias.

Com effeito, para que dois arcos a e α tenham o mesmo seno ou a mesma cosecante, é preciso e sufficiente que elles satisfaçam a uma das formulas (E), isto é, que tenham

$$a - \alpha = 2k\pi \quad \text{ou então} \quad a + \alpha = (2k+1)\pi$$

21. Fórmula dos arcos tendo uma tangente ou uma cotangente dada. — *Todos os arcos tendo uma tangente ou uma cotangente dada acham-se comprehendidos na fórmula*

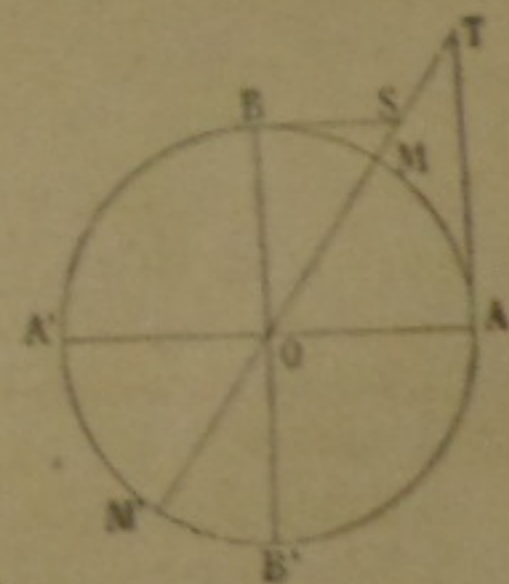
$$a = k\pi + \alpha \qquad \text{(F)}$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k *um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.*

1° Arcos tendo uma tangente dada. — Tomemos sobre a tangente em A um segmento AT igual em grandeza e em signal á tangente dada; depois tiremos a recta OT que encontra a circumferencia em M e em M'. E' evidente que todos os arcos terminados em M ou em M' têm por tangente OT, e que são os unicos.

Fig. 32.

Assim, *todos os arcos que têm a mesma tangente dada terminam sobre o mesmo diametro.*

Logo (nº 6, 3º), se designarmos um d'esses arcos por α, todos se acham comprehendidos na fórmula (F) na qual k representa um numero inteiro qualquer, positivo, nullo ou negativo.

2° Arcos tendo a mesma cotangente. — Tomemos sobre a tangente em B um segmento BS igual em grandeza e signal á cotangente dada ; depois tracemos a recta OS, que corta a circumferencia em M e em M'. Todos os arcos que têm a cotangente dada estão pois terminados sobre o mesmo diametro, e dois quaesquer d'esses arcos, a e α, satisfazem á relação (F).

Condição para que dois arcos tenham tangentes iguaes.

Para que dois arcos tenham tangentes iguaes, e por conseguinte cotangentes iguaes, é preciso e sufficiente que a sua differença seja um numero inteiro qualquer de semi-circumferencias.

Com effeito, para que dois arcos a e α tenham a mesma tangente ou a mesma cotangente, é preciso e sufficiente que satisfaçam á formula (F), isto é, que tenhamos $a - \alpha = k\pi$.

22. Fórmula dos arcos tendo um coseno dado ou uma secante dada. — *Todos os arcos tendo um coseno dado ou uma secante dada estão comprehendidos na formula*

$$a = 2k\pi \pm \alpha \qquad (G)$$

α designando um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

1° Arcos tendo um coseno dado. — Tomemos sobre o eixo dos cosenos AA' um segmento OP igual em grandeza e signal ao coseno dado; depois tiremos pelo ponto P a corda MM' parallela ao diametro BB'. E' evidente que todos os arcos terminados em M e em M' têm por coseno OP, e que são os unicos.

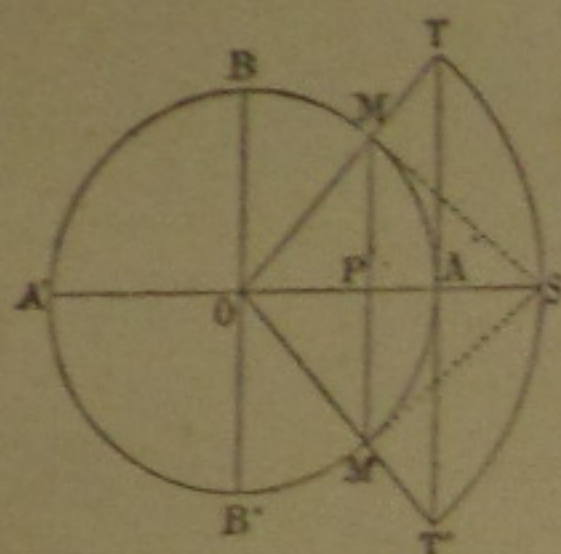



Fig. 33.

Assim, *todos os arcos que têm um coseno dado terminam sobre uma recta perpendicular* ao diametro AA'.

Portanto (n° 6, 4°), se designarmos um d'esses arcos por α, todos estão comprehendidos na formula (G) na qual k representa um numero inteiro qualquer, positivo, negativo ou nullo.

2° Arcos tendo uma secante dada — Tomemos sobre o eixo AA' um segmento OS igual em grandeza e em signal á secante dada; depois tiremos ao circulo as tangentes SM SM'. Todos os arcos terminados em M ou M' têm por secante OS, e são elles os unicos.

Obter-se-hiam esses mesmos pontos M, M' cortando a tangente TT' pela circumferencia descripta do centro O com OS' como raio; as rectas OT, OT' passam pelos pontos procurados.

Esses pontos M e M' são symetricos em relação ao diametro AA'.

Portanto (n° 6, 4°), dois arcos a e α tendo a secante dada satisfazem á fórmula (G).

Condição para que dois arcos tenham cosenos iguaes.

Para que dois arcos tenham cosenos iguaes, e portanto secantes iguaes é preciso e sufficiente que a sua somma ou sua differença seja um numero inteiro de circumferencias.

Effectivamente, para que dois arcos a e α tenham o mesmo coseno ou a mesma secante, é preciso e sufficiente que elles satisfaçam á relação (G), isto é, que tenhamos

$$a \pm \alpha = 2k\pi$$

Funcções circulares inversas. — As seis linhas trigonometricas de um arco são funcções d'esse arco. Inversamente, o arco póde ser considerado como uma funcção de cada uma de suas linhas trigonometricas. Sómente, ao passo que a um arco dado corresponde uma unica linha

trigonometrica de cada especie; pelo contrario, a uma linha trigonometrica dada corresponde uma infinidade de arcos.

Sendo $y = \text{sen}\, x, \quad y = \cos x, \quad y = \text{tg}\, x$

as funcções inversas escrevem-se respectivamente

$$x = \text{arco sen}\, y, \quad x = \text{arco cos}\, y, \quad x = \text{arco tg}\, y$$

Nenhuma d'essas funcções está completamente definida; cada uma d'ellas admitte uma infinidade de determinações differentes; para só conservar porém, um unico valor da primeira funcção, por exemplo basta sujeitar o arco x a ficar incluido entre $-\frac{\pi}{2}$ e $\frac{\pi}{2}$; para conservar sómente um unico valor da segunda funcção, basta especificar que o arco x está comprehendido entre 0 e π.

Os autores inglezes costumam empregar em vez das notações:

$$x = \text{arco sen}\, y;\ x = \text{arco cos}\, y; \ldots..$$

as seguintes

$$x = \overset{-1}{\text{sen}}\, y;\ x = \overset{-1}{\cos}\, y; \ldots..$$

Exercicios

1° *Exprimir em grãos, minutos e segundos o arco $\frac{3\pi}{16}$, o complemento de $\frac{7\pi}{8}$ e o supplemento de $\frac{13\pi}{30}$.*

Substituindo π por seu valor 180°, temos

$$\frac{3\pi}{16} = \frac{3 \times 180}{16} = 33°45'$$

O complemento de $\frac{7\pi}{8}$ é

$$\frac{\pi}{2} - \frac{7\pi}{8} = \frac{-3\pi}{8} = -\ 67°30'$$

O supplemento de $\frac{13\pi}{30}$ é

$$\pi - \frac{13\pi}{30} = \frac{17\pi}{30} = 102°.$$

2° *Sabendo que seno 30° $= \frac{1}{2}$, calcular o seno de cada um dos arcos 150°, 210°, e 330°.*

Temos $150° = 180° - 30°$; logo $\text{sen}\, 150° = \text{sen}\, 30° = \frac{1}{2}$

$210° = 180° + 30°$; logo $\text{sen}\, 210° = -\text{sen}\, 30° = -\frac{1}{2}$

$330° = 360° - 30°$; logo $\text{sen}\, 330° = -\text{sen}\, 30° = -\frac{1}{2}$.

3° *Reduzir ao primeiro quadrante o arco 1894°*

Temos $1894° = 360° \times 5 + 94°$

e $180° - 94° = 86°$

Portanto o arco dado encerra 5 circumferencias inteiras; elle termina no 2° quadrante, e suas linhas trigonometricas têm os mesmos valores absolutos que as de 86°.

4° *Achar os arcos X que verifiquem a igualdade*

$$\operatorname{sen} x = \operatorname{sen} 15°$$

Os arcos tendo o mesmo seno que 15° estão comprehendidos nas duas

$$x = 2k\pi + 15° \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\pi - 15°.$$

fórmulas que podem ser reunidas na fórmula unica

$$x = k\pi + (-1)^k\, 15°$$

5° *Achar todos os arcos X que satisfaçam á igualdade*

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 30°$$

Os arcos tendo a mesma tangente que 30° estão comprehendidos na fórmula $x = k\pi + 30° = k\pi + \frac{\pi}{6} = (6k+1)\frac{\pi}{6}$

6° *Resolver a equação* $\cos x = \cos 45°$

Todos os arcos x tendo o mesmo coseno que 45° estão comprehendidos na fórmula $x = 2k\pi \pm 45° = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4} = (8k \pm 1)\frac{\pi}{4}$

7° *Achar todos os arcos X cujas linhas trigonometricas sejam iguaes em valores absolutos ás do arco* α.

Todos esses arcos x, terminados em um ou em outro dos quatro vertices do mesmo rectangulo trigonometrico, estão comprehendidos na fórmula

$$x = k\pi \pm \alpha$$

8° *Quantos valores differentes toma a expressão* $\cos\frac{k\pi}{7}$, *quando se attribue a* k *todos os valores inteiros de* $-\infty$ *a* $+\infty$?

Construamos sobre um circulo trigonometrico as extremidades de todos os arcos $k.\frac{\pi}{7}$: são os pontos que dividem a circumferencia, a partir da origem A, em 14 partes iguaes; isto é as extremidades do diametro AA' em 12 outros pontos symetricos dois a dois em relação a esse diametro. Ora, os arcos terminados em pontos symetricos em relação a AA' têm o mesmo coseno (n° 22, 1°). Logo, os valores de $\cos\frac{k\pi}{7}$ são 8, a saber:

$$\pm\cos 0°,\ \pm\cos\frac{\pi}{7},\ \pm\cos\frac{2\pi}{7},\ \pm\cos\frac{3\pi}{7}$$

9° *Mostrar que os valores de* $\operatorname{tg}\frac{k\pi}{\sqrt{2}}$, *em numero illimitado, são todos differentes.*

Para dois valores distinctos do numero inteiro, k e k', não se póde ter

$$\operatorname{tg}\frac{k\pi}{\sqrt{2}} = \operatorname{tg}\frac{k'\pi}{\sqrt{2}}$$

Effectivamente, essa igualdade teria por consequencia (n° 21)

$$\frac{k\pi}{\sqrt{2}} = n\pi + \frac{k'\pi}{\sqrt{2}}$$

n sendo um numero inteiro qualquer.

Ora, esta ultima igualdade poderia escrever-se

$$k - k' = n\sqrt{2}$$

o que é impossivel, visto que o segundo membro é irracional.

CAPITULO II

FÓRMULAS TRIGONOMETRICAS

§ I. — Relações entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco.

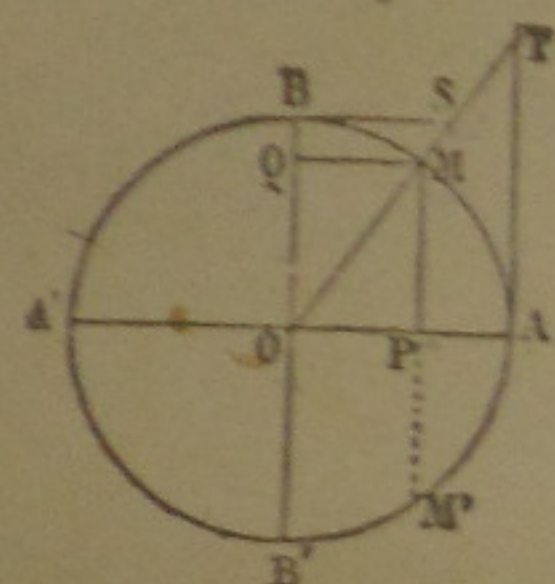
23. Fórmulas fundamentaes. — Entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem 5 relações distinctas, que são as fórmulas fundamentaes da trigonometria.

Seja AM $= a$ um arco do primeiro quadrante. Tracemos suas seis linhas trigonometricas.

Fig. 34.

O triangulo rectangulo OMP dá

$$\overline{MP}^2 + \overline{OP}^2 = \overline{OM}^2$$

ou

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1 \qquad (1)$$

Os triangulos semelhantes OAT, OPM dão

$$\frac{AT}{PM} = \frac{OA}{OP} = \frac{OT}{OM}$$

ou

$$\frac{\text{tg}\, a}{\text{sen}\, a} = \frac{1}{\cos a} = \frac{\sec a}{1}$$

d'onde se extrahe

$$\text{tg} a = \frac{\text{sen}\, a}{\cos a} \qquad (2)$$

e

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} \qquad (3)$$

Os triangulos semelhantes OBS, OPM permittem que se escreva

$$\frac{BS}{OP} = \frac{OB}{PM} = \frac{OS}{OM}$$

ou

$$\frac{\text{cotg}\, a}{\cos a} = \frac{1}{\text{sen}\, a} = \frac{\text{cosec}\, a}{1}$$

isto é

$$\text{cotg}\, a = \frac{\cos a}{\text{sen}\, a} \qquad (4)$$

e

$$\text{cosec}\, a = \frac{1}{\text{sen}\, a} \qquad (5)$$

24. Generalisação das fórmulas fundamentaes. — Supponhamos o arco AM no primeiro quadrante; mas verifica-se facilmente que

as cinco formulas fundamentaes são verdadeiras para um arco qualquer.

Effectivamente, qualquer que seja este arco, existe sempre um arco do primeiro quadrante tendo as mesmas linhas trigonometricas em valor absoluto (nº 15); basta pois verificar os signaes.

Ora, a fórmula (1) não encerrando senão quadrados, quantidades essencialmente positivas, é sempre satisfeita.

A tangente e a cotangente devem ser positivas no primeiro e no terceiro quadrante, e negativas nos outros dois; é esse resultado que dão as fórmulas (2) e (4), pois o seno e o coseno são do mesmo signal no primeiro e no terceiro quadrante, e de signaes contrarios nos outros dois.

Emfim as fórmulas (3) e (5) são tambem geraes, visto que a secante é sempre de mesmo signal que o coseno, e a cosecante de mesmo signal que o seno (nº 9).

25. Fórmulas que se deduzem. — Combinando entre si as formulas fundamentaes, podemos estabelecer muitas mais relações entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco. D'este modo:

1º Multiplicando membro a membro as fórmulas (2) e (4), obtemos

$$\text{tg}\, a \,\text{cotg}\, a = 1$$

ou

$$\text{cotg}\, a = \frac{1}{\text{tg}\, a}$$

Em virtude d'essa relação e das formulas (3) e (5), *a cotangente de um arco é o inverso da tangente, a secante é o inverso do coseno, a cosecante é o inverso do seno.*

Esta observação é importantissima, porque em grande numero de problemas relativos ás seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, permitte-nos considerar exclusivamente o seno, o coseno e a tangente; as outras tres linhas podendo ser consideradas como conhecidas desde que possuimos as suas inversas.

2º Dividindo os dois membros da fórmula (1) por $\cos^2 a$, temos:

$$\frac{\text{sen}^2 a}{\cos^2 a} + 1 = \frac{1}{\cos^2 a}$$

isto é, tendo em conta as fórmulas (2) e (3),

$$1 + \text{tg}^2 a = \sec^2 a$$

Dividindo os dois membros de (1) por $\text{sen}^2 a$, teriamos

$$1 + \text{cotg}^2 a = \text{cosec}^2 a$$

3º Substituindo cos a e sen a por seus inversos, as fórmulas (2) e (5) ficam sendo

$$\text{tg}\, a = \text{sen}\, a \sec a$$

e

$$\text{cotg}\, a = \cos a \,\text{cosec}\, a$$

Obtem-se assim as relações que existem entre as tres linhas directas ou entre as tres linhas complementares

Observação. Por meio de considerações geometricas póde-se tambem estabelecer, entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco, relações differentes de (1, 2, 3, 4, 5). Por exemplo, os triangulos rectangulos OAT, OBS dão immediatamente $1+\mathrm{tg}^2 a=\sec^2 a$

e $$1+\mathrm{cotg}^2 a=\mathrm{cosec}^2 a$$

Porém essas relações, assim como todas aquellas que se podem obter de qualquer maneira entre as linhas trigonometricas de um mesmo arco, podem se deduzir das cinco formulas fundamentaes. É o que resulta do theorema seguinte :

26. Theorema. *Entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem cinco relações distinctas e sómente cinco.*

1° *Ha cinco relações distinctas.* Effectivamente, as cinco formulas fundamentaes que estabelecêmos não podem entrar uma na outra, pois cada uma das quatro ultimas contém uma linha trigonometrica que não figura em nenhuma outra.

Demais, a uma linha trigonometrica dada correspondem arcos que têm suas extremidades em dois pontos sómente (nos 20 e seguintes); as outras cinco linhas trigonometricas d'esses arcos estão pois determinadas e deve-se poder calculal-as em funcção da primeira. Ora, para determinar algebricamente cinco incognitas, é preciso cinco equações. Logo, entre as seis linhas trigonometricas de um mesmo arco, existem cinco relações distinctas.

2° *Não póde haver mais de cinco relações distinctas.* Effectivamente, seis relações distinctas formariam um systema de equações d'onde poder-se-hia tirar para as seis linhas trigonometricas valores determinados e independentes do arco. O que é impossivel.

27. Expressão das linhas trigonometricas de um arco em funcção de uma d'ellas. Por meio das cinco fórmulas fundamentaes, podemos calcular todas as linhas trigonometricas de um arco em funcção de uma qualquer d'entre ellas.

Limitemos-nos a considerar o seno, o coseno, e a tangente, visto que as outras tres linhas são conhecidas ao mesmo tempo que suas inversas (n° 25, 1°).

1° Calcular cos a e tg a em funcção de sen a.

A fórmula (1) dá immediatemente

$$\cos a=\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 a}$$

e a fórmula (2) torna-se

$$\mathrm{tg}\, a=\frac{\mathrm{sen}\, a}{\pm\sqrt{1-\mathrm{sen}^2 a}}$$

Facilmente se comprehendem os duplos signaes : O seno dado determina uma infinidade de arcos, que terminam em dois pontos M, M', symetricos em relação ao diametro BB'. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M' têm cosenos iguaes e signaes contrarios. Logo, sendo dado sen a, o arco a póde terminar indifferentemente em M, ou em M', de modo que o valor de sen a e o de tg a são determinados em valor absoluto, mas não em signal.

28. 2° Calcular sen a e tg a em funcção de cos a. Obtem-se do mesmo modo.

$$\mathrm{sen}\, a=\pm\sqrt{1-\cos^2 a}$$

e $$\mathrm{tg}\, a=\frac{\pm\sqrt{1-\cos^2 a}}{\cos a}$$

O coseno dado determina uma infinidade de arcos que terminam em dois pontos M, M'', symetricos em relação ao diametro AA'. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M'' têm senos iguaes e signaes contrarios, tangentes iguaes e signaes contrarios. Portanto, o arco a sendo um ou outro d'esses arcos, o valor de sen a e o de tg a não são determinados senão em valor absoluto.

29. 3° Calcular sen a e cos a em funcção de tg a. As incognitas são determinadas pelo systema das duas equações

$$\mathrm{sen}^2 a+\cos^2 a=1 \qquad (1)$$

$$\mathrm{tg}\, a=\frac{\mathrm{sen}\, a}{\cos a} \qquad (2)$$

Eliminemos sen a por substituição. A equação (2) póde se escrever

$$\mathrm{sen}\, a=\mathrm{tg}\, a\cos a \qquad (2')$$

A equação (1) fica sendo

$$\cos^2 a(\mathrm{tg}^2 a+1)=1$$

D'ella se deduz $$\cos a=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} \qquad (6)$$

Levando em conta este resultado, a equação (2') dá

$$\mathrm{sen}\, a=\frac{\mathrm{tg}\, a}{\pm\sqrt{1+\mathrm{tg}^2 a}} \qquad (7)$$

Nas fórmulas (6) e (7) os signaes + correspondem-se, assim como os signaes − ; pois cada valor de cos a dá um unico valor de sen a. Não se póde associar os dois valores de cos a com cada um dos valores de sen a, e o systema (1, 2) só admitte duas soluções.

Observação. O systema das equações (1) e (2) póde ser resolvido da seguinte maneira.

A equação (2) póde se escrever, collocando as duas incognitas nos numeradores,

$$\frac{\mathrm{sen}\, a}{\mathrm{tg}\, a}=\frac{\cos a}{1} \qquad (\alpha)$$

Elevemos os dois membros ao quadrado, ajuntemos depois as fracções termo a termo. Vem, attendendo-se á equação (1):

$$\frac{\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{tg}^2 a} = \frac{\cos^2 a}{1} = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2 a} \qquad (\beta)$$

do que se deduz

$$\operatorname{sen} a = \pm \frac{\operatorname{tg} a}{\sqrt{1 \times \operatorname{tg}^2 a}}, \quad \cos a = \frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 a}}$$

Associando cada valor de $\operatorname{sen} a$ a cada valor de $\cos a$ obtem-se quatro soluções que satisfazem ás equações (β); porém o systema (β) não é equivalente ao proposto, pois elevando ao quadrado a equação (α) introduzimos as soluções da equação estranha

$$\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = -\operatorname{tg} a.$$

Para escolher, entre as quatro soluções, aquellas que convêm ás equações (1) e (2), basta notar que os valores correspondentes de $\operatorname{sen} a$ e de $\cos a$ devem ter por quociente $+\operatorname{tg} a$. Só se consegue este resultado tomando o mesmo signal diante dos dois radicaes

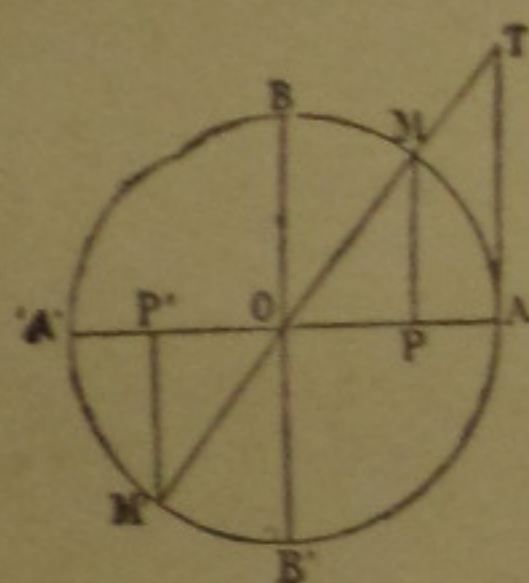



Fig. 35.

30. Explicação dos duplos signaes. A tangente dada determina uma infinidade de arcos, terminados em dois pontos M, M′ diametralmente oppostos. Ora, os arcos terminados em M e aquelles que terminam em M′ têm senos iguaes e de signaes contrarios, cosenos iguaes e de signaes contrarios. Logo, a designando um qualquer d'esses arcos, $\operatorname{sen} a$ e $\cos a$ só se acham determinados em valor absoluto.

Evidentemente desappareceria a ambiguidade, se dessemos o arco a ao mesmo tempo que a sua tangente; poder-se-hia então saber em que quadrante termina esse arco, e d'ahi deduzir o signal de $\operatorname{sen} a$ e o de $\cos a$.

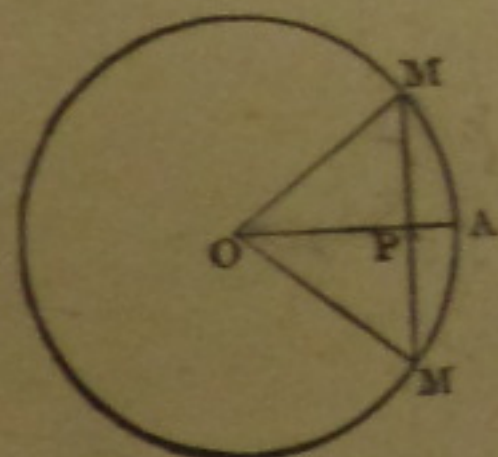



Fig. 36.

31. Calculo das linhas trigonometricas de alguns arcos. *O seno MP de um arco AM é a metade da corda MM′ que subtende um arco duplo.*

Por conseguinte, o lado de qualquer polygono regular é o duplo do seno da metade do angulo ao centro, e o apothema d'esse polygono é o coseno do mesmo angulo.

Sejam c e a o lado e o apothema de um polygono regular de n lados inscripto no circulo de raio 1. O angulo no centro d'esse polygono sendo $\frac{2\pi}{n}$, temos

$$\operatorname{sen}\frac{\pi}{n} = \frac{c}{2} \quad \text{e} \quad \cos\frac{\pi}{n} = a$$

Como se calculou em geometria o lado e o apothema dos polygonos

regulares de 3, 4, 5, 6, 10... lados, as fórmulas precedentes permittem deduzir o seno e o coseno dos arcos seguintes:

$$\frac{\pi}{3} = 60°,\ \frac{\pi}{4} = 45°,\ \frac{\pi}{5} = 36°,\ \frac{\pi}{6} = 30°,\ \frac{\pi}{10} = 18°, \ldots$$

Obtemos:

1°
$$\operatorname{sen} 30° = \cos 60° = \frac{1}{2}$$
$$\cos 30° = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

2°
$$\operatorname{sen} 45° = \cos 45° = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

3°
$$\operatorname{sen} 18° = \frac{\sqrt{5}-1}{4}, \quad \cos 18° = \frac{\sqrt{10+2\sqrt{5}}}{4}$$

Conhecendo o seno e o coseno d'estes arcos, póde-se deduzir todas as suas outras linhas trigonometricas.

Por exemplo, acha-se:

$$\operatorname{tg} 30° = \operatorname{cotg} 60° = \frac{1}{\sqrt{3}}$$
$$\operatorname{tg} 45° = \operatorname{cotg} 45° = 1$$
$$\operatorname{tg} 60° = \operatorname{cotg} 30° = \sqrt{3}$$

II. — Projecção de um contorno polygonal expressa por meio das funcções circulares.

32. Theorema. *A projecção de um segmento de recta AB, sobre um eixo dirigido X′X, é igual, em grandeza e signal, ao producto do comprimento absoluto d'esse segmento, pelo coseno do angulo que forma a propria direcção do segmento com a direcção positiva do eixo.*

Seja A′B′ a projecção de AB sobre X′X; pela origem do segmento,

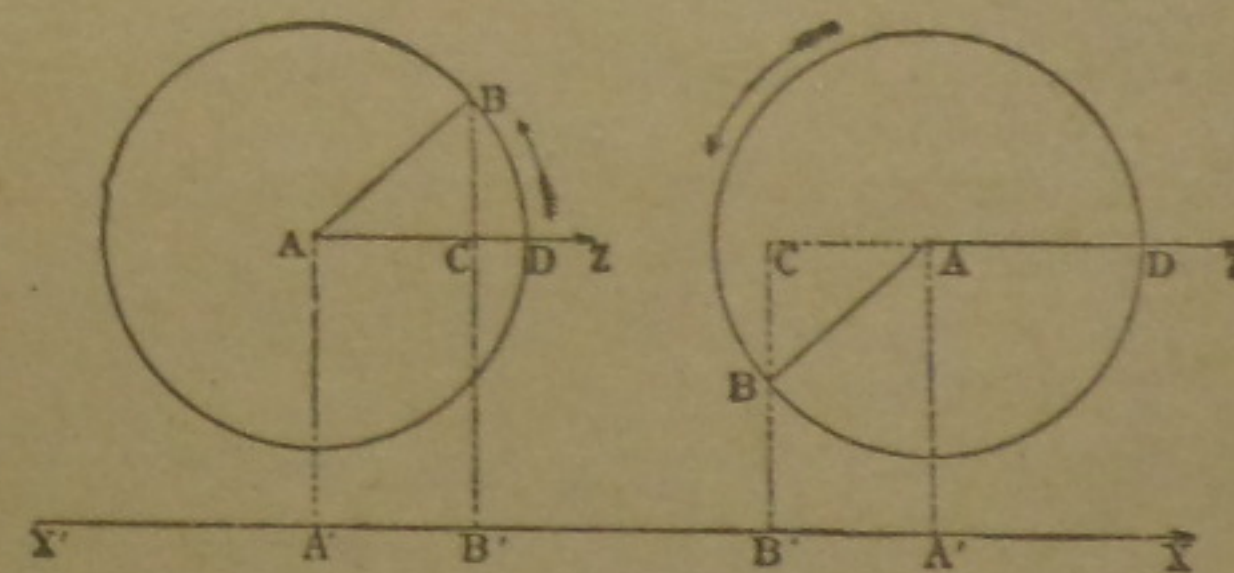



Fig. 37.

tiremos a semi-recta AZ parallela á direcção positiva X′X. Seja C a intersecção de AZ com a projectante BB′. Trata-se de estabelecer a relação.

$$A'B' \text{ ou } AC = AB \cos ZAB.$$

Para isso, da origem A como centro, descrevemos a circumferencia tendo AB como raio. Essa circumferencia corta a semi-recta AZ em um ponto D que se toma como origem dos arcos.

Quatro casos podem se apresentar segundo o ponto B pertença ao 1°, ao 2°, ao 3° ou ao 4° quadrante; mas, em todos os casos, o angulo ZAB tem a mesma medida que o arco DB e, segundo a definição do coseno, sempre tem em grandeza e signal

$$\cos ZAB = \frac{AC}{AB}$$

d'onde
$$AC = AB \cos ZAB \qquad \text{Q. E. D.}$$

33. Corollario. — *A projecção de um contorno polygonal sobre um eixo é igual á somma dos productos que se obtem multiplicando o comprimento de cada lado pelo coseno do angulo que forma a direcção d'esse lado com a direcção positiva do eixo de projecção.*

Seja um contorno polygonal ABCDE, cujos lados têm por comprimentos $AB = a$, $BC = b$, $CD = c$ e $DE = d$.

Designemos por α, β, γ, δ, os angulos formados pela propria direcção

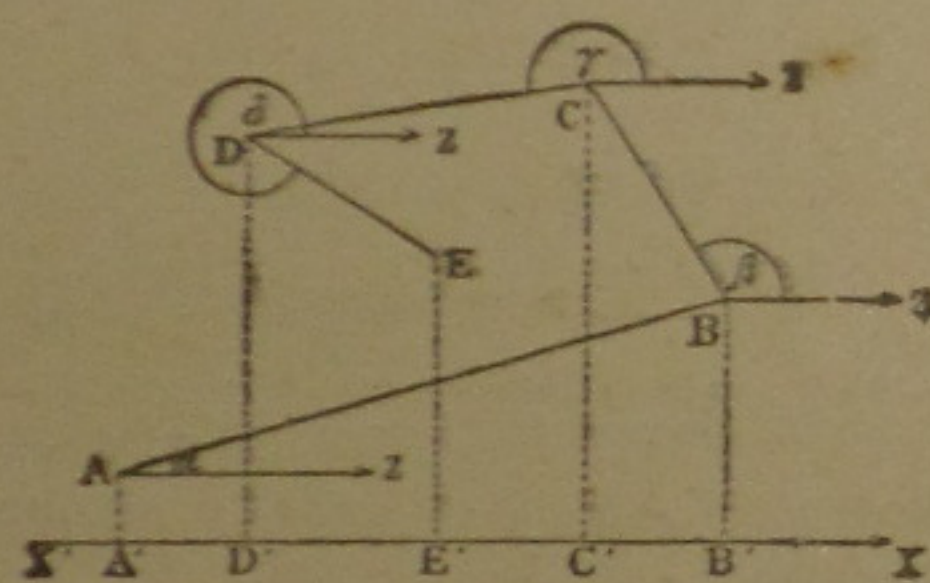



Fig. 33.

de cada um d'esses lados com a direcção positiva do eixo de projecção X'X.

Sabe-se que temos (XI):

$$\text{proj. (ABCDE)} = \text{proj. AB} + \text{proj. BC} + \text{proj. CD} + \text{proj. DE}$$

Em virtude do theorema precedente, essa expressão póde se escrever

$$\text{proj. (ABCDE)} = a \cos \alpha + b \cos \beta + c \cos \gamma + d \cos \delta$$

§ III. — Addição dos arcos.

O problema da addição dos arcos consiste em procurar as linhas trigonometricas de uma somma algebrica de muitos arcos, conhecendo as linhas trigonometricas de cada um d'esses arcos.

34. Calcular o seno e o coseno da somma de muitos arcos, conhecendo os senos e cosenos de cada um d'esses arcos.

1° Seno $(a+b)$ e cos $(a+b)$ em funcção dos senos e cosenos dos arcos a e b.

A partir da origem dos arcos, tiremos, em seguida um ao outro e cada qual em seu proprio sentido, os arcos

$$AC = a, \quad CD = b.$$

Liguemos OC, OD; abaixemos DI perpendicular a OC, depois DP perpendicular a OA; emfim, tracemos as semi-rectas IE, IF respectivamente parallelas ás direcções positivas dos diametros A'A, B'B.

Fig. 39.

Os dois contornos OPD, OID tendo a mesma resultante, suas projecções sobre um eixo qualquer são iguaes entre si (XIII).

Podemos pois escrever:

$$\text{proj. OP} + \text{proj. DP} = \text{proj. OI} + \text{proj. ID} \qquad (\alpha)$$

1° Se tomarmos como eixo de projecção o diametro BB', temos:

$$\text{proj. OP} = 0 \qquad \text{proj. PD} = \text{sen}\,(a+b)$$

$$\text{proj. OI} = \text{OI} \cos \text{BOI} = \text{OI} \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos b \,\text{sen}\, a$$

$$\text{proj. ID} = \text{ID} \cos \text{FID} = \text{ID} \cos a = \text{sen}\, b \cos a$$

Tomando em conta esses valores, a relação (α) torna-se

$$\text{sen}\,(a+b) = \text{sen}\, a \cos b + \cos a \,\text{sen}\, b \qquad (8)$$

2° Se escolhermos o diametro AA' para eixo de projecção, temos:

$$\text{proj. OP} = \cos(a+b); \ \text{proj. PD} = 0$$

$$\text{proj. OI} = \text{OI} \cos \text{AOI} = \text{OI} \cos a = \cos a \cos b$$

$$\text{proj. ID} = \text{ID} \cos \text{EID} = \text{ID} \cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) = -\text{sen}\, a \,\text{sen}\, b$$

A relação (α) torna-se

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen}\, a \,\text{sen}\, b \qquad (9)$$

Esta demonstração, fundada sobre um theorema que subsiste em todos os casos, é ella mesma inteiramente geral. As fórmulas (8) e (9) são pois applicaveis, quaesquer que sejam os valores positivos ou negativos attribuidos aos arcos a e b*.

2° Sen $(a-b)$ e cos $(a-b)$ em funcção dos senos e cosenos dos arcos a e b.

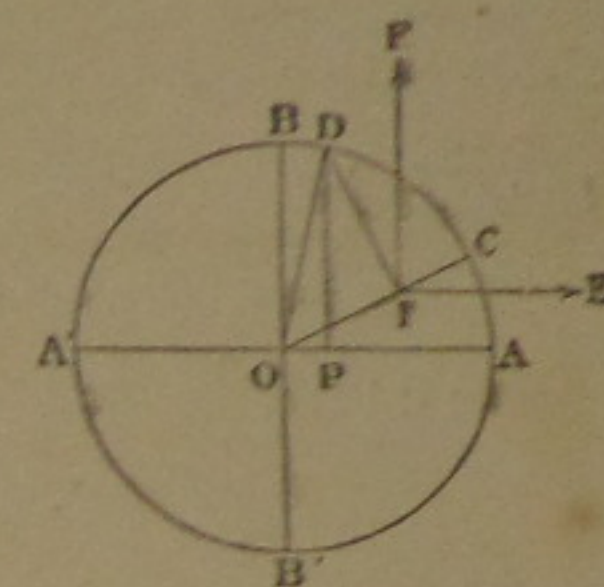
Appliquemos as fórmulas geraes (8) e (9) aos arcos a e $-b$. Levando em conta as igualdades

$$\cos(-b) = \cos b \quad \text{e} \quad \text{sen}\,(-b) = -\text{sen}\, b$$

---

* A demonstração geometrica das fórmulas (8) e (9) acha-se no Appendice, no fim do volume.

obtem-se $\operatorname{sen}(a-b)=\operatorname{sen} a \cos b-\cos a \operatorname{sen} b$ (10)

e $\cos(a+b)=\cos a \cos b+\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$ (11)

3° **Sen** $(a+b+c)$ **e cos** $(a+b+c)$ **em funcção dos senos e cosenos dos arcos** a, b, **e** c. Appliquemos a fórmula (8) aos arcos a e $b+c$.

Obtemos :

$$\operatorname{sen}\{a+(b+c)\}=\operatorname{sen} a \cos(b+c)+\cos a \operatorname{sen}(b+c)$$

ou, desenvolvendo sen $(b+c)$ e cos $(b+c)$

$$\begin{aligned}\operatorname{sen}(a+b+c)=&\operatorname{sen} a \cos b \cos c+\cos a \operatorname{sen} b \cos c\\&+\cos a \cos b \operatorname{sen} c-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

Tambem se obtem por meio da fórmula (9) :

$$\begin{aligned}\cos(a+b+c)=&\cos a \cos b \cos c-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \cos c\\&-\operatorname{sen} a \cos b \operatorname{sen} c-\cos a \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c\end{aligned}$$

Observação. — Procedendo de modo analogo, podemos obter successivamente os senos e os cosenos da somma de 4, 5, 6...., n arcos, em funcção dos senos e cosenos de cada um d'esses arcos. Todas as expressões assim obtidas são polynomios inteiros e homogeneos em relação aos senos e aos cosenos dados, cada termo contendo o seno ou o coseno de cada um dos arcos addicionados.

35. Calcular a tangente de uma somma algebrica de muitos arcos, conhecendo a tangente de cada um d'esses arcos.

1° **Tg** $(a \pm b)$ **em funcção de tg** a **e de tg** b.

1° A fórmula fundamental (2), applicada ao arco $(a+b)$,

dá
$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen}(a+b)}{\cos(a+b)}$$

ou, desenvolvendo os dois termos da fracção,

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b-\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}$$

Para fazer apparecer tg a e tg b, dividamos os valores superiores e inferiores pelo producto cos a cos b. Vem :

$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} a}{\cos a}+\dfrac{\operatorname{sen} b}{\cos b}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}}$$

isto é
$$\operatorname{tg}(a+b)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad (12)$$

2° Applicando esta fórmula aos arcos a e $-b$, obtemos

$$\operatorname{tg}(a-b)=\frac{\operatorname{tg} a-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b} \qquad (13)$$

Observação. — Temos tg 45° = 1 (n° 31). Se suppuzermos $a=45°$, as fórmulas (12) e (13) tornam-se

$$\operatorname{tg}(45°+b)=\frac{1+\operatorname{tg} b}{1-\operatorname{tg} b}$$

e
$$\operatorname{tg}(45°-b)=\frac{1-\operatorname{tg} b}{1+\operatorname{tg} b}$$

2° **Tg** $(a+b+c)$ **em funcção de tg** a, **tg** b **e tg** c. Appliquemos a fórmula (12) aos arcos a e $(b+c)$. Temos

$$\operatorname{tg}\{a+(b+c)\}=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg}(b+c)}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg}(b+c)}$$

ou, desenvolvendo tg $(b+c)$

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg} a+\dfrac{\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}}{1-\operatorname{tg} a \dfrac{\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}}$$

depois, multiplicando os valores superiores e inferiores por $1-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c$

$$\operatorname{tg}(a+b+c)=\frac{\operatorname{tg} a+\operatorname{tg} b+\operatorname{tg} c-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b \operatorname{tg} c}{1-\operatorname{tg} a \operatorname{tg} b-\operatorname{tg} b \operatorname{tg} c-\operatorname{tg} c \operatorname{tg} a}$$

Observações. — 1° Podemos calcular successivamente, de um modo analogo, a tangente da somma 4, 5, 6..., n arcos, em funcção das tangentes d'esses arcos. Todas essas expressões são racionaes em relação ás tangentes dadas.

2° Em logar de deduzir estas expressões umas das outras, poderiamos calcular cada uma d'ellas pelo mesmo processo que a primeira. Assim, para obtermos tg $(a+b+c)$, basta dividir a expressão de sen $(a+b+c)$ pela de cos $(a+b+c)$, depois dividir os dois termos da fracção obtida pelo producto cos a cos b cos c.

§ IV. — Multiplicação dos arcos.

O problema da multiplicação dos arcos consiste em *exprimir as linhas trigonometricas dos multiplos de um arco, em funcção das linhas trigonometricas d'esse arco.*

Este problema é um caso particular do precedente, visto que todo multiplo de um arco a é uma somma de arcos iguaes a a. As fórmulas relativas ao multiplo ma se deduzem immediatamente das fórmulas relativas á somma de m arcos quaesquer, suppondo-se que todos esses arcos tomam um mesmo valor a.

36. Sen $2a$, **cos** $2a$ **ou tg** $2a$, **em funcção de sen** a, **cos** a **ou tg** a.

Nas fórmulas d'addição (8), (9) e (12), façamos $b=a$.

A fórmula $\operatorname{sen}(a+b)=\operatorname{sen} a \cos b+\cos a \operatorname{sen} b$

dá

$$\text{sen } 2a = 2 \text{ sen } a \cos a \qquad (14)$$

Assim tambem

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

torna-se

$$\cos 2a = \cos^2 a - \text{sen}^2 a \qquad (15)$$

Enfim

$$\text{tg}(a+b) = \frac{\text{tg } a + \text{tg } b}{1 - \text{tg } a \text{ tg } b}$$

reduz-se a

$$\text{tg } 2a = \frac{2 \text{ tg } a}{1 - \text{tg}^2 a} \qquad (16)$$

Observação. — Exprimamos cada linha trigonometrica do arco $2a$ em funcção da linha de mesmo nome. Segundo a identidade

$$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1$$

as fórmulas (14) e (15) tornam-se

$$\text{sen}^2 a = \pm 2 \text{ sen } a \sqrt{1 - \text{sen}^2 a}$$
$$\cos 2a = 2\cos^2 a - 1$$

D'este modo, cos $2a$ se exprime racionalmente em funcção de cos a, emquanto que a expressão de sen $2a$ em funcção de sen a contém um radical do segundo grão, e por conseguinte um duplo signal.

Esses resultados explicam-se facilmente :

1º Se temos cos a, o arco a é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (G)

$$a = 2k\pi \pm \alpha$$

α designa um qualquer d'esses arcos e k um numero inteiro arbitrario, positivo ou negativo.

Assim, o arco $2a$ é um qualquer dos arcos

$$2a = 4k\pi \pm 2\alpha$$

Construamos sobre um circulo trigonometrico as extremidades de todos esses arcos. Todos os arcos $4k\pi$ terminam na origem A; por conseguinte todos os arcos $4k\pi + 2\alpha$ terminam no mesmo ponto M, e todos os arcos $4k\pi - 2\alpha$ no mesmo ponto M′ symetrico de M em relação ao diametro A′A. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M′ têm cosenos iguaes e de mesmo signal.

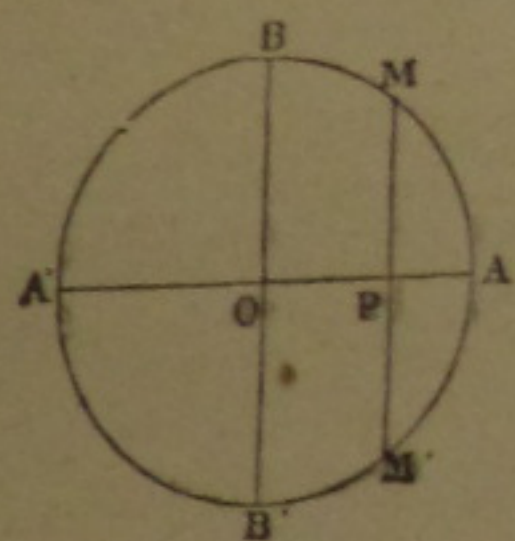



Fig. 40.

Logo, sendo dado cos a, todos os arcos $2a$ têm um unico e mesmo coseno.

2º Sendo dado sen a, o arco a é um qualquer dos arcos comprehendidos nas fórmulas (E)

$$a = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad a = (2k+1)\pi - \alpha$$

α sendo um dos arcos correspondente ao seno dado.

Os arcos $2a$ acham-se portanto comprehendidos nas duas fórmulas

$$2a = 2k\pi + 2\alpha \quad \text{e} \quad 2a = 2k\pi - 2\alpha$$

Construamos as extremidades de todos esses arcos. Os arcos $2k\pi$ terminam em A; logo os arcos $2k\pi + 2\alpha$ terminam em um mesmo ponto M, e os arcos $2k\pi - 2\alpha$ em um ponto M′, symetrico de M em relação a A′A. Ora, os arcos terminados em M e os arcos terminados em M′ têm senos iguaes e de signaes contrarios.

Por conseguinte sendo dado sen a, os arcos $2a$ têm dois senos iguaes e de signaes contrarios.

37. Sen $3a$, cos $3a$ e tg $3a$ em funcção de sen a, cos a, ou tg a.

Podemos proceder de duas maneiras : Nas fórmulas d'addição relativas á somma $(a+b+c)$ (nºs 34 e 35), faz-se $c = b = a$.

Ou então, nas fórmulas d'addição (8), (9) e (12), relativas á somma $(a+b)$, põe-se primeiramente $b = 2a$, depois desenvolve-se sen $2a$.

Vem, depois de feito todo calculo :

$$\text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a \cos^2 a - \text{sen}^3 a \qquad (\alpha)$$
$$\cos 3a = \cos^3 a - 3 \text{ sen}^2 a \cos a \qquad (\beta)$$
$$\text{tg } 3a = \frac{3 \text{ tg } a - \text{tg}^3 a}{1 - 3 \text{ tg}^2 a}$$

Observação I. — Tg $3a$ exprime-se racionalmente em funcção de tg a. Do mesmo modo, como a fórmula (α) não contém cos a senão no segundo grão e a fórmula (β) não encerra sen a senão no segundo grão, podemos exprimir sem radical sen $3a$ em funcção de sen a.

$$\text{sen } 3a = 3 \text{ sen } a - 4 \text{ sen}^3 a$$

e cos $3a$ em funcção de cos a

$$\cos 3a = 4\cos^3 a - 3\cos a$$

Observação II. — O methodo indicado permitte obter-se as linhas trigonometricas dos arcos $4a$, $5a$.... na em funcção das do arco a.

Em geral, sempre se póde exprimir racionalmente tg ma em funcção de tg a e cos ma em funcção de cos a; mas a expressão de sen ma em valor de sen a contém ou não contém radicaes, conforme m é par ou impar.

Estes factos de calculo explicam-se *a priori*, de um modo muito simples, por meio de raciocinios semelhantes aos que terminam o nº 36.

Observação III. — As fórmulas precedentes, assim como as relações fundamentaes, são *identidades*, isto é, subsistem para qualquer valor do arco considerado.

Por exemplo, as fórmulas (14), (15), (16), podem se escrever, substituindo em toda parte a por $\frac{a}{2}$:

$$\text{sen } a = 2 \text{ sen } \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} \qquad (J)$$

$$\cos a = \cos^2 \frac{a}{2} - \text{sen}^2 \frac{a}{2} \qquad (K)$$

$$\text{tg } a = \frac{2 \text{ tg}^2 \frac{a}{2}}{1 - \text{tg}^2 \frac{a}{2}} \qquad (L)$$

Empregaremos estas fórmulas no paragrapho seguinte, para calcular as linhas trigonometricas do arco $\frac{a}{2}$ em funcção das do arco a : o que constitue uma propriedade frequentemente applicada.

38. Theorema. — Todas as linhas trigonometricas de um arco se exprimem racionalmente em funcção da tangente da metade d'esse arco.

1º Demonstração pelo calculo.

Para obter sen a cos a e tg a, em funcção das linhas do arco $\frac{a}{2}$, substituimos a por $\frac{a}{2}$ nas fórmulas (14), (15) e (16) ; temos assim as fórmulas (J), (K), (L).

A terceira exprime racionalmente tg a em funcção de tg $\frac{a}{2}$.

Para fazer apparecer tg $\frac{a}{2}$ nos segundos membros das outras duas, dividimol-as pelo binomio $\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}$ que é igual á unidade.

A primeira torna-se, dividindo os valores superiores e inferiores por $\cos^2\frac{a}{2}$,

$$\operatorname{sen} a=\frac{2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}=\frac{2\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} \qquad (M)$$

e a segunda,

$$\cos a=\frac{\cos^2\frac{a}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}{\cos^2\frac{a}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}} \qquad (N)$$

Assim, conformemente ás formulas (L), (M) e (N), sen a, cos a e tg a se exprimem racionalmente em funcção de tg $\frac{a}{2}$. Portanto o mesmo se dá com as linhas inversas cosec a, sec a e cotg a.

Observação. — Conseguir-se-hia o mesmo resultado substituindo, nas expressões (J) e (K), sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ em funcção de tg $\frac{a}{2}$.

As fórmulas conhecidas (6) e (7) podem-se escrever, desdobrando todos os arcos,

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{\operatorname{tg}\frac{a}{2}}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}} \quad \cos\frac{a}{2}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\frac{a}{2}}}$$

Levando em conta estas fórmulas, nas quaes devemos tomar o mesmo signal diante de cada radical (nº 29), as fórmulas (J) e (K) se transformam em (M) e (N).

2º Demonstração a priori. Se temos tg $\frac{a}{2}$, o arco $\frac{a}{2}$ é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (F)

$$\frac{a}{2}=k\pi+\frac{\alpha}{2}$$

$\frac{\alpha}{2}$ sendo um dos arcos correspondente á tangente dada.

Por conseguinte, a é um qualquer dos arcos

$$a=2k\pi+\alpha$$

Ora, todos esses arcos terminam no mesmo ponto do circulo trigonometrico. Por conseguinte, só admittem uma unica linha trigonometrica de cada especie, e a expressão de uma d'essas linhas não pode encerrar uma radical que consinta um duplo signal.

§ V. — Divisão dos arcos.

O problema da divisão dos arcos consiste em *expressar as linhas trigonometricas dos submultiplos de um arco, em funcção das linhas trigonometricas d'esse arco.*

Limitamo-nos a resolver este problema no caso especial da *bissecção* : conhecendo as linhas trigonometricas do arco a, deduzir d'ellas as do arco $\frac{a}{2}$.

39. 1º Sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ em funcção de cos a. Sendo dado cos a, trata-se de calcular sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$. Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na formula (15) e na primeira fórmula fundamental, obtemos as equações a duas incognitas

$$\begin{cases}\cos^2\frac{a}{2}+\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=1\\ \cos^2\frac{a}{2}-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=\cos a\end{cases}$$

Se ajuntarmos e depois subtrahirmos membro a membro essas duas equações, chegamos ao systema equivalente

$$\begin{cases}2\cos^2\frac{a}{2}=1+\cos a & (\alpha)\\ 2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}=1-\cos a & (\beta)\end{cases}$$

do que se deduz

$$\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos a}{2}} \qquad (17)$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{2}} \qquad (18)$$

Numero de soluções. Cada incognita tem dois valores reaes, iguaes e de signaes contrarios, e como os valores de sen $\frac{a}{2}$ são independentes dos valores de cos $\frac{a}{2}$, podemos associar cada uma das primeiras com cada uma das segundas, do que resultam quatro soluções do systema.

2° Tg $\frac{a}{2}$ em funcção de cos a. Dividindo membro a membro as fórmulas (18) e (17), obtemos

$$\operatorname{tg}\frac{a}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos a}{1+\cos a}} \qquad (19)$$

Observação. As fórmulas intermediarias (α) e (β) empregam-se frequentemente. Escrevem-se

$$1+\cos a=2\cos^2\frac{a}{2} \qquad (P)$$

$$1-\cos a=2\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} \qquad (Q)$$

40. Explicação dos duplos valores. Temos cos a. O arco a não está determinado : é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (G)

$$a=2k\pi\pm\alpha$$

α designa um arco determinado, tendo o coseno dado

Portanto, o arco $\frac{a}{2}$, do qual se procuram as linhas trigonometricas, é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula

$$\frac{a}{2}=k\pi\pm\frac{\alpha}{2}$$

Tracemos sobre um circulo trigonometrico as extremidades de todos esses arcos. Os arcos $k\pi$ terminam no ponto A ou no ponto A'; de modo que os arcos $k\pi+\frac{\alpha}{2}$ terminam em dois pontos N, N_1 diametralmente oppostos, e os arcos $k\pi-\frac{\alpha}{2}$ em dois outros pontos N_2, N_3 diametralmente oppostos e symetricos dos primeiros em relação a cada um dos diametros rectangulares A'A, B'B.

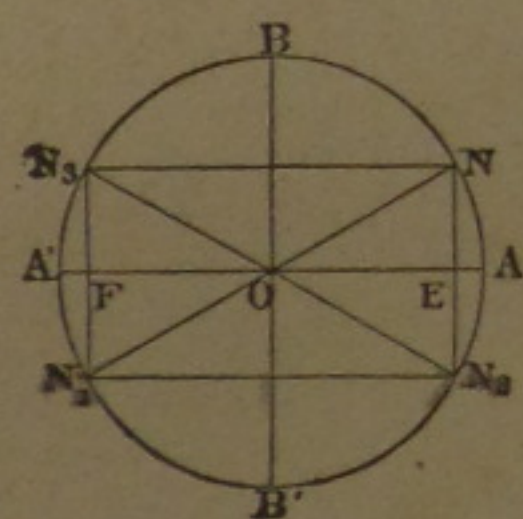



Fig. 41.

Ora os arcos terminados em N, N_3 e os terminados em N_1, N_2 têm senos iguaes e signaes contrarios. Os arcos terminados em N, N_2 e os terminados em N_3, N_1 têm cosenos iguaes e signaes contrarios. Emfim, os arcos terminados em N, N_1 e os terminados em N_3, N_2, têm tangentes iguaes e signaes contrarios.

Portanto, cada uma das fórmulas que exprimem todas estas linhas trigonometricas deve dar dois valores de somma nulla.

Explicação das quatro soluções. O arco $\frac{a}{2}$, determinado por cos a, é um qualquer d'aquelles que terminam em um dos pontos N, N_1, N_2, N_3. Ora, se adoptarmos successivamente para a extremidade do arco $\frac{a}{2}$ cada um d'esses quatro pontos, verifica-se que os dois valores de sen $\frac{a}{2}$ se acham associados successivamente a cada um dos valores de cos $\frac{a}{2}$. Por conseguinte o problema que consiste em procurar sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ em funcção de cos a admitte quatro soluções differentes.

Cessação da ambiguidade. Sendo dado o proprio arco a, ao mesmo tempo que o seu coseno, o problema já não tem senão uma unica solução. O arco $\frac{a}{2}$ acha-se então bem determinado ; podemos saber em que quadrante termina esse arco $\frac{a}{2}$ e d'isso deduzir o signal de cada uma de suas linhas trigonometricas, isto é, o signal que se deve conservar diante do radical, em cada uma das fórmulas (17), (18) e (19).

41. Sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ em funcção de sen a. Sendo dado sen a, trata-se de calcular sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$. Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na fórmula (14) e na primeira fórmula fundamental, obtem-se o systema de equações a duas incognitas.

$$\left\{\begin{array}{l}\operatorname{sen}^2\frac{a}{2}+\cos^2\frac{a}{2}=1\\[4pt] 2\operatorname{sen}\frac{a}{2}\cos\frac{a}{2}=\operatorname{sen}a\end{array}\right. \qquad (\alpha)$$

Ajuntando e depois subtrahindo estas duas equações membro a membro, d'ellas desduz-se o systema equivalente.

$$\left\{\begin{array}{l}\left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}\right)^2=1+\operatorname{sen}a\\[4pt] \left(\operatorname{sen}\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}\right)^2=1-\operatorname{sen}a\end{array}\right.$$

que se póde escrever

$$\left\{\begin{array}{ll}\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a} & (\beta)\\[4pt] \operatorname{sen}\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}=\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a} & (\gamma)\end{array}\right.$$

Se combinarmos estas equações membro a membro, por addição, depois por substracção, d'ellas se deduz

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}) \qquad (20)$$

$$\cos\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(\pm\sqrt{1+\operatorname{sen}a}\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}a}) \qquad (21)$$

Numero de soluções. Em cada uma d'estas fórmulas, os signaes diante dos radicaes são independentes um dos outros; obtêm-se então quatro valores reaes para sen $\frac{a}{2}$ e os mesmos valores para cos $\frac{a}{2}$. Porém, a cada valor de sen $\frac{a}{2}$, a equação (α) não permitte de fazer corresponder senão um unico valor de cos $\frac{a}{2}$; de modo que o systema admitte quatro soluções, e não dezeseis.

Os signaes semelhantemente collocados nas duas fórmulas correspondem-se entre si. Com effeito, as equações (β), (γ) se decompõem cada uma em duas outras; portanto, o systema (β, γ) equivale ao conjuncto de quatro systemas parciaes, não admittindo cada um senão uma unica solução. Basta escrever e resolver individualmente esses quatro systemas, para verificar que os signaes relativos a uma mesma solução acham-se collocados semelhantemente nas fórmulas (20) e (21).

42. Explicação dos valores multiplos. Temos sen a. O arco a não está determinado: é um qualquer dos arcos comprehendidos nas formulas (E).

$$a=2k\pi+\alpha \qquad \text{e} \qquad a=(2k+1)\pi-\alpha$$

α designa um arco determinado, tendo o seno dado.

Assim, o arco $\frac{a}{2}$, do qual se buscam as linhas trigonometricas, é um qualquer dos arcos comprehendido nas fórmulas

$$\frac{a}{2}=k\pi+\frac{\alpha}{2} \qquad \text{e} \qquad \frac{a}{2}=(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$$

Construamos sobre um circulo trigonometrico a extremidade de todos esses arcos.

Qualquer que seja o numero inteiro k, o arco $k\pi$ termina em A ou em A'; logo $k\pi+\frac{\alpha}{2}$ termina em um ponto N ou no ponto N_1 diametralmente opposto. $(2k+1)\frac{\pi}{2}$ termina em B ou em B';

logo $(2k+1)\frac{\pi}{2}-\frac{\alpha}{2}$ termina no ponto N_2 symetrico de N em relação á bissectriz do angulo AOB, ou no ponto N_3 diametralmente opposto a N_2.

Ora os arcos terminados nas extremidades do diametro N_2 N_3 têm os senos e os cosenos respectivamente iguaes aos cosenos e aos senos dos arcos terminados nas extremidades do diametro NN_1.

Esses senos e esses cosenos têm quatro valores, geralmente distinctos, iguaes dois a dois e com signaes contrarios.

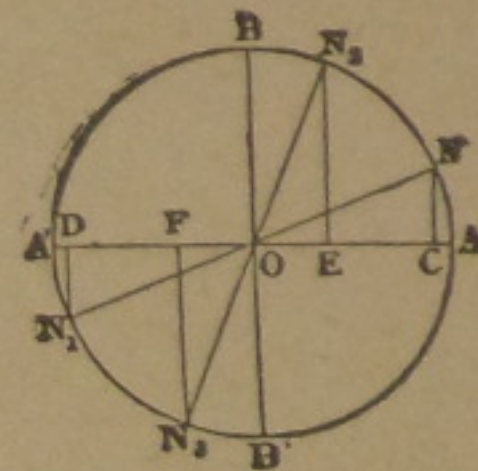



Fig. 42.

Cessação da ambiguidade. — Se tivermos o arco a ao mesmo tempo que sen a, o problema só admitte uma solução.

Com effeito, sua metade $\frac{a}{2}$ se acha então bem determinada; podemos saber em que oitavo de circumferencia cahe sua extremidade; o que dá a conhecer o signal de cada um dos binomios.

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}+\cos\frac{a}{2}$$

$$\operatorname{sen}\frac{a}{2}-\cos\frac{a}{2}$$

Desde logo o systema (α, β) está bem determinado, e d'elle podemos concluir qual é o signal que se deve antepôr aos radicaes nas formulas (20) e (21).

Por exemplo, seja $a=50°$, d'onde $\frac{a}{2}=25°$.

O seno e o coseno do arco $\frac{a}{2}$ são positivos, mas o coseno é maior que o seno. Temos pois que resolver o systema

$$\operatorname{sen}25°+\cos25°=+\sqrt{1+\operatorname{sen}50°}$$

$$\operatorname{sen}25°-\cos25°=-\sqrt{1-\operatorname{sen}50°}$$

A solução é unica.

Seja ainda $a=420°$, d'onde $\frac{a}{2}=210°$.

O arco $\frac{a}{2}$ estando comprehendido entre 180° e 225°, sen $\frac{a}{2}$ e cos $\frac{a}{2}$ são negativos e, em valor absoluto, o coseno é maior que o seno. O systema (α,β) torna-se pois

$$\operatorname{sen}210°+\cos210°=-\sqrt{1+\operatorname{sen}420°}$$

$$\operatorname{sen}210°-\cos210°=+\sqrt{1-\operatorname{sen}420°}$$

Do que deduz-se

$$\operatorname{sen}210°=\frac{-\sqrt{1+\operatorname{sen}420°}+\sqrt{1+\operatorname{sen}420°}}{2}$$

$$\cos210°=\frac{-\sqrt{1+\operatorname{sen}420°}-\sqrt{1-\operatorname{sen}420°}}{2}$$

43. Tg $\frac{a}{2}$ em funcção de tg a. — Substituindo a por $\frac{a}{2}$ na fórmula (16), obtemos a equação

$$\operatorname{tg} a = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{a}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

que temos de ordenar e resolver em relação a $\operatorname{tg} \frac{a}{2}$

Póde-se escrever

$$\operatorname{tg} a \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{a}{2} - \operatorname{tg} a = 0 \qquad (\alpha)$$

d'onde

$$\operatorname{tg} \frac{a}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}}{\operatorname{tg} a} \qquad (22)$$

O producto das raizes da equação (α) sendo egual a — 1, qualquer que seja tg a, sempre se têm duas raizes *reaes, inversas* uma da outra e de *signaes contrarios*.

44. Explicação d'estes resultados. Temos tg a. O arco a não está determinado : é um qualquer dos arcos comprehendidos na fórmula (F) $a = k\pi + \alpha$

α designando um arco determinado, tendo a tangente dada.

Os arcos dos quaes se procura a tangente estão pois comprehendidos na fórmula

$$\frac{a}{2} = k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$$

Fig. 43.

Construamos sobre o circulo trigonometrico a extremidade de todos esses arcos.

Os arcos $k\frac{\pi}{2}$ terminam nas extremidades dos diametros rectangulares AA′, BB′; por conseguinte os arcos $k\frac{\pi}{2} + \frac{\alpha}{2}$ terminam nas extremidades dos outros dois diametros rectangulares NN_1, $N_2 N_3$.

Ora, os arcos terminados em N e N_1 têm a mesma tangente AR ; os terminados em N_2 e N_3 têm outra tangente AR′.

Os valores absolutos d'essas tangentes são inversos, visto que a altura OA do triangulo rectangulo ROR′ determina a relação

$$\overline{AR} \cdot \overline{AR'} = \overline{OA}^2 = 1$$

Emfim essas tangentes são de signaes contrarios, de mòdo que temos

$$\operatorname{tg} AOR . \operatorname{tg} AOR' = -1.$$

Cessação da ambiguidade. Se tivermos o arco a ao mesmo

tempo que tg a, o problema fica com uma solução só ; n'esse caso o arco $\frac{a}{2}$ está bem determinadoe podemos saber em que quadrante cahe a extremidade d'esse arco, d'isso deduzir o signal de sua tangente, e escolher qual das raizes da equação (α) é a que dá o valor d'essa tangente.

§ VI. — Transformações logarithmicas.

Tornar calculavel por logarithmos uma expressão polynomia dada, é transformar essa expressão em um monomio equivalente.

Isso se consegue applicando as fórmulas que vamos estabelecer, ou por meio de angulos auxiliares.

Formulas de transformação.

Temos em vista tornar calculavel por meio de logarithmos a somma algebrica de duas linhas trigonometricas do mesma especie.

46. Transformar em producto sen $p \pm$ sen q.

Faz-se $p = a + b$ e $q = a - b$

d'onde $a = \frac{p+q}{2}$, $b = \frac{p-q}{2}$

Então, $\operatorname{sen} p \pm \operatorname{sen} q = \operatorname{sen}(a+b) \pm \operatorname{sen}(a-b)$.

Em virtude das formulas

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\operatorname{sen}(a-b) = \operatorname{sen} a \cos b - \cos a \operatorname{sen} b$$

as igualdades precedentes tornam-se respectivamente

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} a \cos b \qquad (\alpha)$$

isto é

$$\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q = 2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad (23)$$

e

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos a \operatorname{sen} b \qquad (\beta)$$

isto é

$$\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \qquad (24)$$

Observação I. As fórmulas precedentes (23) e (24) permittem que se substitua á somma algebrica de dois senos o duplo producto de um seno por um coseno.

II. As relações (α) e (β) podem se escrever.

$$2 \operatorname{sen} a \cos b = \operatorname{sen}(a+b) + \operatorname{sen}(a-b)$$
$$2 \cos a \operatorname{sen} b = \operatorname{sen}(a+b) - \operatorname{sen}(a-b).$$

Ellas servem para substituir o producto de um seno e de um coseno pela somma algebrica de dois sene

Applicações. 1º *Transformar a expressão*

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q}$$

Se dividirmos membro a membro as fórmulas (**23**) e (**24**) temos

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2}}{2 \cos \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2}}$$

Mas

$$\frac{\operatorname{sen} \frac{p+q}{2}}{\cos \frac{p+q}{2}} = \operatorname{tg} \frac{p+q}{2}$$

e

$$\frac{\cos \frac{p-q}{2}}{\operatorname{sen} \frac{p-q}{2}} = \operatorname{cotg} \frac{p-q}{2} = \frac{1}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}}$$

logo

$$\frac{\operatorname{sen} p + \operatorname{sen} q}{\operatorname{sen} p - \operatorname{sen} q} = \frac{\operatorname{tg} \frac{p+q}{2}}{\operatorname{tg} \frac{p-q}{2}} \qquad (28)$$

2º *Transformar a expressão sen* a ± *cos* b.

Podemos escrever em primeiro logar

$$\sin a \pm \cos b = \operatorname{sen} a \pm \operatorname{sen} \left(\frac{\pi}{2} - b\right)$$

depois applicando as fórmulas (**23**) e (**24**)

$$\operatorname{sen} a + \cos b = 2 \operatorname{sen} \left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \cos \left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$\operatorname{sen} a - \cos b = 2 \cos \left(\frac{a-b}{2} + \frac{\pi}{4}\right) \operatorname{sen} \left(\frac{a+b}{2} - \frac{\pi}{4}\right)$$

47. Transformar em producto $\cos p \pm \cos q$.

Faz-se $p = a + b$ e $q = a - b$

logo $a = \frac{p+q}{2}$ $b = \frac{p-q}{2}$

Então, $\cos q \pm \cos q = \cos (a+b) \pm \cos (a-b)$

Ora, por termos $\cos (a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$
$\cos (a-b) = \cos a \cos b + \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$

as igualdades precedentes tornam-se respectivamente

$$\cos p + \cos q = 2 \cos a \cos b \qquad (\alpha)$$

Isto é

$$\cos p + \cos q = 2 \cos \frac{p+q}{2} \cos \frac{p-q}{2} \qquad (26)$$

e

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (\beta)$$

isto é

$$\cos p - \cos q = -2 \operatorname{sen} \frac{p+q}{2} \operatorname{sen} \frac{p-q}{2} \qquad (27)$$

Observação I. As fórmulas precedentes (**26**) e (**27**) permittem substituir a somma de dois cosenos pelo duplo producto de dois cosenos. A differença de dois cosenos, podemos substituir o duplo producto de dois senos.

II. As relações (α) e (β) podem se escrever

$$2 \cos a \cos b = \cos (a+b) + \cos (a-b)$$
$$2 \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b = \cos (a-b) - \cos (a+b)$$

Ellas servem para substituir o duplo producto de dois senos ou de dois cosenos pela somma ou a differença de dois cosenos.

Caso especial. *Transformar a expressão* $1 \pm \cos a$

Podemos escrever $1 \pm \cos a = \cos 0° \pm \cos a$

Por conseguinte, em virtude das fórmulas (**26**) e (**27**), temos

$$1 + \cos a = 2 \cos^2 \frac{a}{2} \qquad (P)$$

$$1 - \cos a = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2} \qquad (Q)$$

igualdades já encontradas (nº 39).

Dividindo-as membro a membro, obtemos

$$\frac{1 + \cos a}{1 - \cos a} = \frac{1}{\operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

d'onde deduzimos:

$$\cos a = \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{a}{2}}$$

Formula já conhecida (nº 38).

48. Transformar em monomio $\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b$.

Substituindo cada tangente em funcção de seno e de coseno, depois addicionando as fracções obtidas, temos

$$\operatorname{tg} a \pm \operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} \pm \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b \pm \cos a \operatorname{sen} b}{\cos a \cos b}$$

isto é

$$\text{tg}\, a \pm \text{tg}\, b = \frac{\text{sen}\,(a \pm b)}{\cos a \cos b} \qquad (28)$$

Caso especial. Podemos applicar esta fórmula á expressão

$$1 \pm \text{tg}\, a$$

Temos $\quad 1 = \text{tg}\, 45^\circ \quad$ e $\quad \cos 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Por conseguinte

$$1 \pm \text{tg}\, a = \frac{\text{sen}\,(45^\circ \pm a)}{\cos 45^\circ \cos a} = \frac{\text{sen}\,(45^\circ \pm a)\sqrt{2}}{\cos a}$$

Observação. Para transformar em monomio a somma de duas linhas complementares da mesma especie, procede-se como para a somma de duas tangentes. Obtem-se assim

$$\text{cotg}\, a \pm \text{cotg}\, b = \frac{\text{sen}\,(b \pm a)}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b} \qquad (29)$$

$$\sec a + \sec b = \frac{\cos a + \cos b}{\cos a \cos b} = \frac{2 \cos \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\cos a \cos b}$$

$$\text{cosec}\, a + \text{cosec}\, b = \frac{\text{sen}\, a + \text{sen}\, b}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b} = \frac{2\, \text{sen}\, \frac{a+b}{2} \cos \frac{a-b}{2}}{\text{sen}\, a\, \text{sen}\, b}$$

Emprego dos angulos auxiliares.

Representemos por a, b, c... monomios positivos conhecidos ou dados sómente por seus logarithmos, e tornemos calculavel por logarithmos uma somma algebrica d'esses monomios.

49. 1° Tornar logarithmico um binomio $x = a \pm b$.

O methodo consiste em pôr um dos termos em factor commum, de modo a fazer apparecer um binomio do qual um dos termos seja igual á unidade; depois em identificar esse binomio com um dos seguintes que sabemos tornar logarithmicos :

$$1 - \cos^2 \varphi \qquad\qquad 1 \pm \cos \varphi$$
$$1 + \text{tg}^2 \varphi \qquad\qquad 1 \pm \text{tg}\, \varphi$$

Pondo a em factor commum, a expressão dada toma a fórma

$$x = a\left(1 \pm \frac{b}{a}\right)$$

1° Se $\frac{b}{a}$ é inferior a 1 e precedido do signal —, podemos pôr $\frac{b}{a} = \cos^2 \varphi$, o que dá

$$x = a\,(1 - \cos^2 \varphi) = a\, \text{sen}^2 \varphi$$

2° Se $\frac{b}{a}$ é inferior a 1 e precedido de um ou outro signal podemos pôr $\frac{b}{a} = \cos \varphi$, o que dá (n° 39) :

$$a + b = a\,(1 + \cos \varphi) = 2a \cos^2 \frac{\varphi}{2}$$

e

$$a - b = a\,(1 - \cos \varphi) = 2a\, \text{sen}^2 \frac{\varphi}{2}$$

3° Quaesquer que sejam a e b, no caso de uma somma, podemos escrever $\frac{b}{a} = \text{tg}^2 \varphi$, temos então (n° 25) :

$$a + b = a\,(1 + \text{tg}^2 \varphi) = a \sec^2 \varphi = \frac{a}{\cos^2 \varphi}$$

4° Em todos os casos podemos escrever $\frac{b}{a} = \text{tg}\, \varphi$, d'onde (n° 48) :

$$a \pm b = a\,(1 \pm \text{tg}\, \varphi) = \frac{a\sqrt{2}\, \text{sen}\,(45^\circ \pm \varphi)}{\cos \varphi}$$

2° Tornar logarithmico um polynomio $a + b + c + d + \ldots$

Por meio de um angulo auxiliar substitue-se primeiramente $a + b$ por um monomio β; depois, por meio de um segundo angulo auxiliar, substitue-se $\beta + c$, isto é $a + b + c$, por um monomio γ; e assim por diante.

Se o polynomio contém n termos, é preciso recorrer successivamente a $n - 1$ angulos auxiliares.

50. Applicações. O methodo dos angulos auxiliares é geral; para transformar, porém, um binomio dado, os quatro systemas acima não são igualmente vantajosos; muitas vezes convém modificar um pouco o methodo geral.

Exemplo I. *Tornar logarithmico* $\sqrt{a^2 + b^2}$

Adopta-se o terceiro processo. A expressão póde se escrever

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}$$

ou, fazendo $\quad \frac{b^2}{a^2} = \text{tg}\,^2$

$$\sqrt{a^2 + b^2} = a\sqrt{1 + \text{tg}^2 \varphi} = a \sec \varphi = \frac{a}{\cos \varphi}$$

Exemplo II. *Tornar logarithmico* $\sqrt{a^2 - b^2}$

Suppondo $a > b$, recorre-se ao primeiro processo. A expressão póde-se escrever

$$\sqrt{a^2 - b^2} = a\sqrt{1 - \frac{b^2}{a^2}}$$

ou, fazendo $$\frac{b^2}{a^2}=\cos^2\varphi$$

$$\sqrt{a^2-b^2}=a\sqrt{1-\cos^2\varphi}=a\,\text{sen}\,\varphi$$

Exemplo III. *Tornar logarithmico* $\dfrac{a-b}{a+b}$

Em logar de tornar logarithmico separadamente cada um dos termos da fracção, dividem-se os valores superiores e inferiores por a, depois faz-se $\dfrac{b}{a}=\text{tg}\,\varphi$

A expressão torna-se (nº 49)

$$\frac{a-b}{a+b}=\frac{1-\dfrac{b}{a}}{1+\dfrac{b}{a}}=\frac{1-\text{tg}\,\varphi}{1+\text{tg}\,\varphi}=\text{tg}\,(45^\circ-\varphi)$$

Exemplo IV. *Tornar logarithmico* $a\,\text{sen}\,x\pm b\cos x$

Põe-se em factor commum a sómente, em logar de a sen x;

obtem-se $$a\left(\text{sen}\,x\pm\frac{b}{a}\cos x\right)$$

ou, pondo $$\frac{b}{a}=\text{tg}\,\varphi,$$

$$a\left(\text{sen}\,x\pm\frac{\text{sen}\,\varphi}{\cos\varphi}\cos x\right)$$

isto é $$\frac{a}{\cos\varphi}(\text{sen}\,x\cos\varphi\pm\text{sen}\,\varphi\cos x)$$

ou emfim $$\frac{a\,\text{sen}\,(x\pm\varphi)}{\cos\varphi}$$

51 Problema. *Tornar calculaveis por logarithmos as raizes de uma equação do segundo grão*

$$ax^2+bx+c=0$$

Estas raizes, suppostas reaes, têm por expressão

$$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

Ha dois casos a distinguir :

1º caso $\dfrac{c}{a}<0$. O radical póde-se escrever

$$\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}$$

o producto ac sendo negativo, podemos escrever

$$\frac{4ac}{b^2}=\text{tg}^2\varphi$$

d'onde $$\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm b\sqrt{1+\text{tg}^2\varphi}=\pm b\sec\varphi$$

A fórmula torna-se

$$x=\frac{-b\pm b\sec\varphi}{2a}=-\frac{b}{2a}\left(1\mp\frac{1}{\cos\varphi}\right)=-\frac{b(\cos\varphi\mp1)}{2a\cos\varphi}$$

d'onde, separando as raizes

$$x'=+\frac{b}{2a}\left(\frac{1-\cos\varphi}{\cos\varphi}\right)=+\frac{b\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}$$

$$x''=-\frac{b}{2a}\left(\frac{1+\cos\varphi}{\cos\varphi}\right)=-\frac{b\cos^2\frac{\varphi}{2}}{a\cos\varphi}$$

2º caso. $\dfrac{c}{d}>0$ com $b^2-4ac>0$

Temos $$\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm b\sqrt{1-\frac{4ac}{b^2}}$$

b^2 sendo superior a $4ac$, podemos escrever $\dfrac{4ac}{b^2}=\text{sen}^2\varphi$.

Então, $\pm\sqrt{b^2-4ac}=\pm b\sqrt{1-\text{sen}^2\varphi}=\pm b\cos\varphi$

As raizes tornam-se

$$x'=\frac{-b+b\cos\varphi}{2a}=-\frac{b}{2a}(1-\cos\varphi)=-\frac{b}{a}\,\text{sen}^2\frac{\varphi}{2}$$

$$x''=\frac{-b-b\cos\varphi}{2a}=-\frac{b}{2a}(1+\cos\varphi)=-\frac{b}{a}\cos^2\frac{\varphi}{2}$$

Exercicios.

1º *Conhecendo sen* **a** $=\dfrac{4}{5}$, *calcular o coseno e a tangente do arco* **a**.

Temos $$\cos a=\pm\sqrt{1-\text{sen}^2 a}+\mp\sqrt{1-\frac{16}{25}}=\pm\frac{3}{5}$$

e por conseguinte $$\text{tg}\,a=\frac{\text{sen}\,a}{\cos a}=\pm\frac{4}{3}$$

2º *Conhecendo tg* **a** $=\dfrac{\text{m}}{\text{n}}$, *calcular sen* **a** *e cos* **a**.

As fórmulas (6) e (7) dão

$$\text{sen}\,a=\frac{\text{tg}\,a}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}=\frac{\dfrac{m}{n}}{\pm\sqrt{1+\dfrac{m^2}{n^2}}}=\pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

$$\cos a=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\text{tg}^2 a}}=\frac{1}{\pm\sqrt{1+\dfrac{m^2}{n^2}}}=\pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

3° *Verificar a igualdade*

$$\text{arco sen}\,\frac{m-1}{m+1} = \text{arco cos}\,\frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

Esta igualdade exprime que os numeros

$$\frac{m-1}{m+1} \quad \text{e} \quad \frac{2\sqrt{m}}{m+1}$$

são o seno e o coseno do mesmo arco. Para isso, em virtude da primeira fórmula fundamental, é preciso e sufficiente ter

$$\left(\frac{m-1}{m+1}\right)^2 + \left(\frac{2\sqrt{m}}{m+1}\right)^2 = 1$$

O que tem logar com effeito, pois o primeiro membro póde-se escrever

$$\frac{(m-1)^2+4m}{(m+1)^2} \quad \text{ou} \quad \frac{(m+1)^2}{(m+1)^2}$$

4° *Calcular o seno de 75°*

Este arco sendo a somma dos arcos 45° e 30°, podemos escrever

$$\text{sen}\,75° = \text{sen}\,(45°+30°) = \text{sen}\,45° \cos 30 + \text{sen}\,30° \cos 45°$$

$$= \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$

5° *Demonstrar a relação*

$$\text{sen}\,(a+b)\,\text{sen}\,(a-b) = \text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

O primeiro membro póde-se escrever successivamente

$$(\text{sen}\,a \cos b + \cos a\, \text{sen}\,b)\,(\text{sen}\,a \cos b - \cos a\, \text{sen}\,b)$$

$$\text{sen}^2 a \cos^2 b - \cos^2 a\, \text{sen}^2 b$$

$$\text{sen}^2 a\,(1 - \text{sen}^2 b) - (1 - \text{sen}^2 a)\,\text{sen}^2 b$$

e emfim

$$\text{sen}^2 a - \text{sen}^2 b$$

6° *Calcular* $tg\,\frac{a}{2}$ *em funcção de sec* **a**.

A fórmula (n° 38)

$$\sec a = \frac{1}{\cos a} = \frac{1+\text{tg}^2\frac{a}{2}}{1-\text{tg}^2\frac{a}{2}}$$

dá

$$\text{tg}^2\,\frac{a}{2} = \frac{\sec a - 1}{\sec a + 1}$$

do que resulta

$$\text{tg}\,\frac{a}{2} = \pm\sqrt{\frac{\sec a - 1}{\sec a + 1}}$$

7° *Calcular sen 4x, sabendo que* $tg\,x = 3$

Temos (n°s 38 e 36)

$$\text{sen}\,4x = \frac{2\,\text{tg}\,2x}{1+\text{tg}^2\,2x} = \frac{4\,\text{tg}\,x\,(1-\text{tg}^2 x)}{(1+\text{tg}^2 x)^2} = \frac{4.3\,(-8)}{100} = -\frac{24}{25}$$

8° *Demonstrar a identidade*

$$\text{tg}^2 x + \text{cotg}^2 x = 2\,\frac{3+\cos 4x}{1-\cos 4x}$$

Temos (n°s 36 e 38)

$$\cos 4x = 1 - 2\,\text{sen}^2\,2x = 1 - \frac{8\,\text{tg}^2 x}{(1+\text{tg}^2 x)^2}$$

O segundo membro da identidade póde pois escrever-se

$$2\,\frac{4 - \dfrac{8\,\text{tg}^2 x}{(1+\text{tg}^2 x)^2}}{\dfrac{8\,\text{tg}^2 x}{(1+\text{tg}^2 x)^2}} = \frac{1+\text{tg}^4 x}{\text{tg}^2 x} = \text{tg}^2 x + \frac{1}{\text{tg}^2 x}$$

resultado identico ao primeiro membro

9° *Na hypothese* $a+b+c = 180°$, *demonstrar que temos*

$$tg\,a + tg\,b + tg\,c = tg\,a\,tg\,b\,tg\,c$$

Temos

$$a + b = 180° - c$$

ou, igualando as tangentes dos dois membros

$$\frac{\text{tg}\,a + \text{tg}\,b}{1 - \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b} = \text{tg}\,(180° - c) = -\text{tg}\,c$$

do que resulta $\quad \text{tg}\,a + \text{tg}\,b = -\text{tg}\,c + \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b\,\text{tg}\,c$

e emfim $\quad \text{tg}\,a + \text{tg}\,b + \text{tg}\,c = \text{tg}\,a\,\text{tg}\,b\,\text{tg}\,c \qquad (R)$

10° *Na hypothese* $a+b+c = 180°$, *demonstrar que temos*

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1$$

A relação dada permitte escrever

$$a + b = 180 - c$$

ou, igualando os cosenos dos dois membros,

$$\cos a \cos b - \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b = -\cos c$$

Isolemos o termo em seno, depois elevemos os dois membros ao quadrado, vem : $\quad \cos a \cos b + \cos c = \text{sen}\,a\,\text{sen}\,b$

$$\cos^2 a \cos^2 b + 2\cos a \cos b \cos c + \cos^2 c = \text{sen}^2 a\,\text{sen}^2 b$$

$$= (1-\cos^2 a)(1-\cos^2 b)$$

$$= 1 - \cos^2 a - \cos^2 b + \cos^2 a \cos^2 b$$

d'onde emfim

$$\cos^2 a + \cos^2 b + \cos^2 c + 2\cos a \cos b \cos c = 1 \qquad (S)$$

11° *Suppondo que temos* $a+b+c = 180°$, *tornar calculaveis por logarithmos as expressões*

$$x = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b + \text{sen}\,c$$
$$y = \text{sen}\,a + \text{sen}\,b - \text{sen}\,c$$

Temos $c = 180 - (a+b)$ d'onde $\text{sen}\, c = \text{sen}\,(a+b)$

A primeira expressão póde-se escrever

$$x = \text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\,(a+b)$$

As fórmulas (23) e (24) permittem que se substitúa

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b = 2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2}\cos\frac{a-b}{2}$$

e

$$\text{sen}\,(a+b) = 2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2}\cos\frac{a+b}{2}$$

O que dá, pondo em factor commum $2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2}$

$$x = 2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} + \cos\frac{a+b}{2}\right)$$

Podemos substituir $\text{sen}\,\frac{a+b}{2}$ por $\cos\frac{c}{2}$, e o parenthesis por

$$2\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}$$

Vem finalmente

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c = 4\cos\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \qquad \text{(T)}$$

A segunda expressão se transforma de igual maneira
Temos successivamente

$$y = \text{sen}\, a + \text{sen}\, b - \text{sen}\,(a+b)$$

$$= 2\,\text{sen}\,\frac{a+b}{2}\left(\cos\frac{a-b}{2} - \cos\frac{a+b}{2}\right)$$

e emfim

$$\text{sen}\, a + \text{sen}\, b - \text{sen}\, c = 4\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\cos\frac{c}{2} \qquad \text{(U)}$$

Achariamos do mesmo modo

$$\text{sen}\, a - \text{sen}\, b + \text{sen}\, c = 4\,\text{sen}\,\frac{a}{2}\cos\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2}$$

$$-\text{sen}\, a + \text{sen}\, b + \text{sen}\, c = 4\cos\frac{a}{2}\,\text{sen}\,\frac{b}{2}\,\text{sen}\,\frac{c}{2}$$

12° *Tornar calculavel por logarithmos a somma dos senos de uma serie de arcos em progressão arithmetica*

Seja a transformar a somma

$$S = \text{sen}\, a + \text{sen}\,(a+h) + \text{sen}\,(a+2h) + \ldots + \text{sen}\left\{a + (n-1)h\right\}$$

Se multiplicarmos por $2\,\text{sen}\,\frac{h}{2}$ os dois membros da relação proposta, temos:

$$2S\,\text{sen}\,\frac{h}{2} = 2\,\text{sen}\, a\,\text{sen}\,\frac{h}{2} + 2\,\text{sen}\,(a+h)\,\text{sen}\,\frac{h}{2} + \ldots + 2\,\text{sen}\left[a + (n-1)h\right]\text{sen}\,\frac{h}{2}$$

Mas segundo a fórmula (26) cada duplo producto de dois senos póde ser substituido por uma differença de dois cosenos; temos pois:

$$2\,\text{sen}\, a\,\text{sen}\,\frac{h}{2} = \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{h}{2}\right)$$

$$2\,\text{sen}\,(a+h)\,\text{sen}\,\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{3h}{2}\right)$$

$$2\,\text{sen}\,(a+2h)\,\text{sen}\,\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{3h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{5h}{2}\right)$$

. . . .

$$2\,\text{sen}\left[a + (n-1)h\right]\text{sen}\,\frac{h}{2} = \cos\left(a + \frac{2n-3}{2}h\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)$$

ajuntando membro a membro, temos:

$$2S\,\text{sen}\,\frac{h}{2} = \cos\left(a - \frac{h}{2}\right) - \cos\left(a + \frac{2n-1}{2}h\right)$$

$$= 2\,\text{sen}\left[a + \frac{n-1}{2}h\right]\text{sen}\,\frac{nh}{2}$$

d'onde

$$S = \frac{\text{sen}\left(a + \frac{n-1}{2}h\right)\text{sen}\,\frac{nh}{2}}{\text{sen}\,\frac{h}{2}} \qquad \text{(V)}$$

Transforma-se de modo analogo a *somma dos cosenos de* n *arcos em progressão arithmetica*.

Acha-se que a somma

$$\cos a + \cos(a+h) + \cos(a+2h) + \ldots + \cos\left\{a + (n-1)h\right\}$$

tem por valor

$$\frac{\cos\left\{a + \frac{n-1}{2}h\right\}\text{sen}\,\frac{nh}{2}}{\text{sen}\,\frac{h}{2}}$$

CAPITULO III

TABOAS TRIGONOMETRICAS

§ I. — Construcção das taboas.

Nas applicações da Trigonometria, é necessario conhecer as linhas trigonometricas que correspondem a um arco dado, e reciprocamente (XX); eis porque construiram-se taboas que mostram os valores d'essas linhas para certo numero de arcos que se succedem com intervallos sufficientemente approximados.

Vamos indicar como se póde construir uma d'essas taboas, empregando-se um methodo elementar.

Como as linhas trigonometricas têm no 1° quadrante todos os valores absolutos que são susceptiveis de tomarem, basta calcular esses valores para o 1° quadrante. Em todo caso, podemo-nos limitar aos arcos mais pequenos que 45°, visto que os cosenos dos arcos de 0° a 45° são os senos dos arcos de 45° a 90°, etc. Emfim, conhecendo-se uma das linhas de um arco, v. g. o seno, as fórmulas do capitulo precedente permittem deduzir as outras linhas d'esse arco, depois as de seu duplo, de sua metade, etc. Basta pois calcular o seno do primeiro arco.

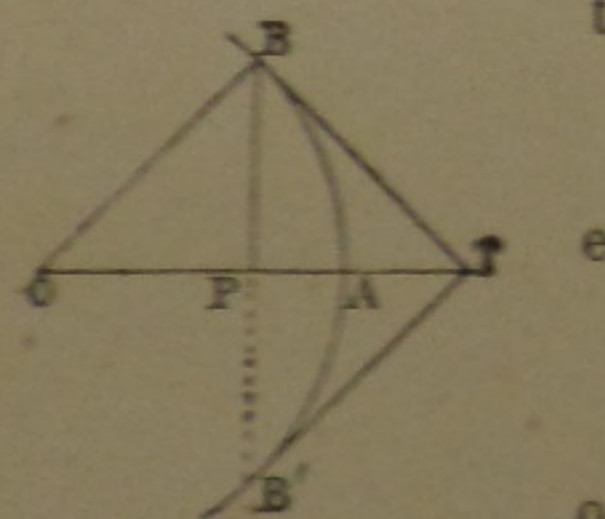
Procuremos o seno do arco de 10″: alguns principios preliminares nos permittirão conhecer o grão de approximação obtido.

52. Theorema I. *Um arco menor que 90° é maior que o seu seno e mais pequeno que a sua tangente.*

Seja o arco $AB = a$; tracemos a corda BB' perpendicular a OA e a tangente BT. Evidentemente temos (*Geometria*):

Fig. 44.

$$BT = B'T = \operatorname{tg} a;$$

e

$$BB' = 2BP = 2 \operatorname{sen} a$$

Mas tambem temos

$$BB' < \text{arco } BAB' < BT + B'T$$

ou

$$2 \operatorname{sen} a < 2a < 2 \operatorname{tg} a$$

por conseguinte $\operatorname{sen} a < a < \operatorname{tg} a$

53. Corollario. *Um arco muito pequeno differe muito pouco de seu seno.*

Com effeito, na desigualdade precedente, se dividirmos as tres quantidades por seno a, resulta :

$$1 < \frac{a}{\operatorname{sen} a} < \frac{1}{\cos a}$$

ora, á medida que o arco a diminue e tende para zero, o coseno augmenta e tende para a unidade; por conseguinte a relação $\frac{1}{\cos a}$ tem por limite 1, e $\frac{a}{\operatorname{sen} a}$ estando comprehendido entre 1 e uma expressão cujo limite é 1, tem igualmente por limite 1. N'outros termos, *um arco muito pequeno e o seu seno differem pouco um do outro*; podemos, pois desprezar o erro que commettemos tomando por valor approximado do seno o proprio arco. O theorema seguinte permitte calcular o limite do erro commettido.

54. Theorema II. *A differença entre um arco do 1° quadrante e o seu seno é menor do que a quarta parte do cubo do arco*

Com effeito, temos $\operatorname{tg} \frac{a}{2} > \frac{a}{2}$ ou $\dfrac{\operatorname{sen} \frac{a}{2}}{\cos \frac{a}{2}} > \frac{a}{2}$

Multipliquemos os dois membros por $2 \cos^2 \frac{a}{2}$ resulta :

$$2 \operatorname{sen} \frac{a}{2} \cos \frac{a}{2} > a \cos^2 \frac{a}{2}$$

ou $\operatorname{sen} a > a \cos^2 \frac{a}{2}$ ou emfim $\operatorname{sen} a > a \left(1 - \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}\right)$

Se substituirmos $\operatorname{sen} \frac{a}{2}$ por $\frac{a}{2}$, quantidade maior, reforça-se a desigualdade e temos :

$$\operatorname{sen} a > a\left(1 - \frac{a^2}{4}\right) \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} a > a - \frac{a^3}{4}$$

ou emfim

$$a - \operatorname{sen} a < \frac{a^3}{4}$$

Por conseguinte, *tomando-se o arco pelo seno, o erro é menor do que a quarta parte do cubo do arco.*

Observação. Este theorema e o precedente mostram que sen a está comprehendido entre a e $a - \frac{a^3}{4}$; por conseguinte temos :

$$a > \operatorname{sen} a > a - \frac{a^3}{4}$$

55. Theorema III. O coseno de um arco do 1° quadrante acha-se comprehendido entre $1 - \frac{a^2}{2}$ e $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$:

Ora, se na relação (n° 39, Observação) :

$$\cos a = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

substitue-se sen $\frac{a}{2}$ pela quantidade maior $\frac{a}{2}$, o segundo membro estando diminuido, temos :

$$\cos a > 1 - \frac{a^2}{2}$$

D'outra parte, se, na mesma relação, subtituirmos sen $\frac{a}{2}$ pela quantidade menor $\frac{a}{2} - \frac{1}{4}\left(\frac{a}{2}\right)^3$ (nº 54, Observação) ou $\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}$, o segundo membro estará augmentado, e poderemos escrever

$$\cos a < 1 - 2\left(\frac{a}{2} - \frac{a^3}{32}\right)^2 \quad \text{ou} \quad \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16} - \frac{2a^6}{32^2}$$

desigualdade que será tambem verdadeira, *a fortiori*, se augmentarmos o 2º membro de $\frac{2a^6}{32^2}$; ella torna-se então $\cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$.

Por conseguinte cos a está comprehendido entre $1 - \frac{a^2}{2}$ e $1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$, e póde-se escrever : $1 - \frac{a^2}{2} < \cos a < 1 - \frac{a^2}{2} + \frac{a^4}{16}$

O erro que se commette tomando $1 - \frac{a^2}{2}$ por cos a é pois menor do que $\frac{a^4}{16}$.

56. Calculo de sen 10″ e de cos 10″. O comprimento do arco de 180º é π ou 3,141 59... ; elle contém $180 \times 60 \times 60 = 648\,000''$.

Logo, $\text{arc } 10'' = \frac{\pi}{64\,800} = 0{,}000\,048\,481\,368\,110...$

Este quociente é um numero menor que 0,000 05 ; se tomarmos este valor por sen 10″, o erro será menor que $\frac{(0{,}000\,05)^3}{4}$ (nº 54), isto é menor do que $\frac{0{,}000\,000\,000\,000\,125}{4}$; o valor de sen 10″ será pois exacto pelo menos até a 13ª decimal, e teremos

$$\text{sen } 10'' = 0{,}000\,048\,481\,368\,1...$$

Se agora tomarmos $\cos 10'' = 1 - \frac{(\text{arco } 10'')^2}{2}$, o erro commettido será menor que $\frac{(0{,}000\,05)^4}{16}$ (nº 55), isto é menor que $\frac{0{,}000\,000\,000\,000\,000\,006\,25}{16}$; o valor obtido será pois exacto ao menos até a 18ª decimal; limitando-nos ás 13 primeiras temos :

$$\cos 10'' = 0{,}999\,999\,998\,824\,8...$$

Poder-se-hia calcular os senos e cosenos dos arcos de 10″ em 10″ por meio das fórmulas que dão sen $2a$, cos $2a$, etc. : mas o calculo faz-se mais simplesmente fazendo uso das fórmulas de *Thomaz Simpson*.

57. Formulas de Simpson. — Calculo dos senos e cosenos dos arcos de 10″ em 10″.

Addicionando membro a membro as fórmulas (8) e (10), depois as formulas (9) e (11) obtemos :

$$\text{sen}(a+b) + \text{sen}(a-b) = 2 \,\text{sen}\, a \cos b$$
$$\cos(a+b) + \cos(a-b) = 2 \cos a \cos b$$

a 1ª dá $\quad \text{sen}(a+b) = \text{sen}\, a . 2\cos b - \text{sen}(a-b)$

e a 2ª $\quad \cos(a+b) = \cos a . 2\cos b - \cos(a-b)$

Se fizermos $a = mb$, estas fórmulas tornam-se :

$$\text{sen}(m+1)b = \text{sen}\, mb . 2\cos b - \text{sen}(m-1)b$$
$$\cos(m+1)b = \cos mb . 2\cos b - \cos(m-1)b$$

Ellas permittem calcular os senos e cosenos dos arcos

$$b,\ 2b,\ 3b,\ 4b,\ ...\ mb,\ (m+1)b$$

conhecendo sen b e cos b.

Supponhamos $b = 10''$; fazendo successivamente $m = 1$, $m = 2$, $m = 3$, etc., vem :

$$\begin{array}{l|l}
\text{sen } 20'' = \text{sen } 10'' . 2\cos 10'' - 0 & \cos 20'' = \cos 10'' . 2\cos 10'' - 1 \\
\text{sen } 30'' = \text{sen } 20'' . 2\cos 10'' - \text{sen } 10'' & \cos 30'' = \cos 30'' . 2\cos 10'' - \cos 10'' \\
\text{sen } 40'' = \text{sen } 30'' . 2\cos 10'' - \text{sen } 20'' & \cos 40'' = \cos 30'' . 2\cos 10'' - \cos 20'' \\
\text{sen } 50'' = \text{sen } 40'' . 2\cos 10'' - \text{sen } 30'' & \cos 50'' = \cos 40'' . 2\cos 10'' - \cos 30''
\end{array}$$

. . . .

Simplificação a partir de 30º. A partir de 30º, o calculo de cada linha trigonometrica se reduz a uma simples diminuição.

Com effeito, temos $\frac{1}{2}$ sen 30º = ; logo as relações (23) e (27)

$$\text{sen}(30^\circ + b) + \text{sen}(30^\circ - b) = 2 \,\text{sen}\, 30^\circ \cos b$$
$$\cos(30^\circ + b) - \cos(30^\circ - b) = 2 \,\text{sen}\, 30^\circ \,\text{sen}\, b$$

dão :

$$\text{sen}(30^\circ + b) = \cos b - \text{sen}(30^\circ - b)$$
$$\cos(30^\circ + b) = \cos(30^\circ - b) - \text{sen}\, b$$

Se suppuzermos b inferior a 30º, tudo está conhecido nos segundos membros. Uma subtracção dará o seno ou o coseno de cada um dos arcos m 10″ comprehendidos entre 30º e 60º.

Simplificação a partir de 45º É inutil continuar o calculo além de 45º, visto que cada um dos arcos seguintes é o complemento de um arco cujo seno e coseno são já conhecidos. Temos :

$$\text{sen}(45^\circ + m\,10'') = \cos(45^\circ - m\,10'')$$
$$\cos(45^\circ + m\,10'') = \text{sen}(45^\circ - m\,10'')$$

58. Observações. I. Se seguissemos o systema que acabamos de indicar para calcular os senos e os cosenos, sería necessario recorrer a numerosas verificações, pois um erro commettido em uma operação tornaria errados todos os calculos seguintes. Além d'isto, os valores de

sen 10″ e de cos 10″ sendo sómente approximados, os erros vão se accumulando á medida que se effectuam os calculos, e podem chegar a ser consideraveis. Para remediar este inconveniente, convém haver cuidado em determinar directamente os senos e cosenos de certos arcos convenientemente escolhidos, afim de verificar os resultados obtidos. Esta questão já foi tratada (nº 31); por meio das fórmulas do nº 39, póde-se ter directamente os senos e os cosenos de 9º em 9º. Poder-se-hia tambem tomar esses valores, calculados directamente com uma approximação sufficiente, como pontos de partida de uma nova serie de operações que se effectuariam com as fórmulas de Simpson.

II. Algumas obras especiaes contêm os valores numericos ou valores naturaes das funcções trigonometricas; mas na maior parte das applicações os calculos fazem-se por meio dos logarithmos; é essa a razão por que as taboas usuaes só dão os logarithmos d'esses valores, e contentaram-se em inscrever n'essas taboas os logarithmos das quatro funcções: *sen*, *cos*, *tg* e *cotg*. Se houvesse necessidade dos logarithmos da secante e da cosecante, bastaria tomar os cologarithmos do coseno e do seno, visto que estas ultimas linhas são as inversas das outras duas.

§ II. — Taboa dos logarithmos das funcções trigonometricas. Disposição e uso das taboas.

59. Existem duas especies de taboas trigonometricas:

1º As *grandes taboas*, chamadas taboas de Callet que contêm com 7 decimaes os logarithmos das linhas trigonometricas dos arcos de 10″ em 10″, desde 0º até 90º, e de segundo em segundo para os 5 primeiros gráos. A edição de Callet, geralmente abandonada hoje em dia, está substituida vantajosamente pela de Dupuis, que offerece muito melhor disposição e mais facilidade no seu uso.

2º As *pequenas taboas*, ditas de Lalande, que contêm os logarithmos das linhas trigonometricas dos arcos de minuto em minuto. Essas taboas só têm 5 decimaes; o mesmo se dá com as pequenas taboas publicadas por Dupuis, Houel e F. I. C.; entretanto, algumas edições de Lalande foram ampliadas até 7 decimaes por Marie, Reynaud e outros.

Como a disposição das taboas trigonometricas é a mesma em todas ellas, basta indicar, por exemplo, a das taboas de F. I. C.

No titulo de cada columna se acha tambem o numero de gráos do arco; de 0º a 45º, elle está escripto em cima, e os minutos a que se refere acham-se na primeira columna á esquerda. Nas outras columnas se acham, debaixo dos titulos respectivos, os logarithmos dos *sen*, *tg*, *cotg* e *cos*; a leitura faz-se de cima para baixo. De 45º a 90º, a taboa volta, para assim dizer, sobre si-mesma, e lê-se em sentido inverso: os gráos estão em baixo das paginas, e os minutos na 1ª columna á direita. A columna dos *sen* ficou sendo a dos *cos*, e reciprocamente; a columna das *tg* ficou sendo igualmente a dos *cotg*, e reciprocamente; o que se comprehende sem difficuldade, visto que um arco maior que 45º tem por complemento um arco mais pequeno, e *vice-versa*.

As differenças entre os logarithmos dos senos de dois arcos consecutivos formam uma columna de *differenças tabulares*, com as quaes podem se

calcular os logarithmos intermediarios. O mesmo se dá com as tangentes, etc. Essas differenças são *positivas* para os *senos* e as *tangentes*, porque estas funcções crescem com o arco, emquanto que são *negativas* para os *cosenos* e as *cotangentes*, que diminuem quando o arco augmenta.

As taboas de Dupuis e de Houël contêm, além d'isso, taboas de *partes proporcionaes* que dispensam certos calculos que se é obrigado a fazer quando se trabalha com as taboas de Lalande.

A mesma columna de *differenças* se refere ao mesmo tempo ás *tg* e *cotg*; pois, estas linhas sendo inversas, tem-se para dois arcos consecutivos a e b: $\operatorname{tg} a . \operatorname{cotg} a = \operatorname{tg} b . \operatorname{cotg} b$; d'onde $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{cotg} b}{\operatorname{cotg} a}$, e applicando os logarithmos: $\log \operatorname{tg} a - \log \operatorname{tg} b = \log \operatorname{cotg} b - \log \operatorname{cotg} a$.

Podemos observar que a differença dos logarithmos das tangentes de dois arcos é a somma das differenças dos logarithmos dos senos e dos logarithmos dos cosenos dos mesmos arcos, visto que:

$\operatorname{tg} a = \frac{\operatorname{sen} a}{\cos a}$ e $\operatorname{tg} b = \frac{\operatorname{sen} b}{\cos b}$; d'onde $\frac{\operatorname{tg} a}{\operatorname{tg} b} = \frac{\operatorname{sen} a \cos b}{\cos a \operatorname{sen} b}$; applicando-se pois os logarithmos:

$$\log \operatorname{tg} a - \log \operatorname{tg} b = \log \operatorname{sen} a - \log \operatorname{sen} b + \log \cos b - \log \cos a.$$

60. Observações. — I. Examinando as taboas, nota-se que as differenças tabulares tornam-se muito pequenas para os senos dos arcos proximos de 90º; de modo que uma pequena mudança de valor ou um pequeno erro no logarithmo do seno produz uma mudança relativamente consideravel no arco. A mesma observação é applicavel aos cosenos dos arcos muito pequenos. Assim, *um arco muito pequeno é mal determinado por seu coseno, e um arco proximo de 90º é mal determinado por seu seno*. O inconveniente é muito menor para as tangentes, visto que a differença tabular das tangentes é a somma das differenças tabulares dos senos e dos cosenos; é preferivel, pois, calcular os angulos por meio das tangentes.

II. Os senos e os cosenos de todos os arcos são menores que 1; o mesmo acontece com as tangentes dos arcos mais pequenos que 45º; e com as cotangentes dos arcos comprehendidos entre 45º e 90º; por consequencia, todas essas linhas têm logarithmos negativos. Ora, em certas taboas, para evitar os caracteristicos negativos, foram os logarithmos augmentados de 10 unidades; esta addição é, porém, inutil, e, na pratica, é melhor restabelecer a verdadeira caracteristica.

III. O uso das grandes taboas é mais vantajoso do que o das pequenas: ellas permittem operar mais rapidamente e attingir mais rigorosa approximação. Geralmente consegue-se a mesma approximação com as pequenas taboas de 7 decimaes, mas os calculos são muito mais trabalhosos. Nas applicações usuaes, as taboas de 5 decimaes dão os resultados com a exactidão desejada; seriam, porém, insufficientes para tratar convenientemente as questões propostas nas Escolas superiores.

* Convém lembrar que as medidas tomadas com os instrumentos ordinarios estão sempre

61. Quaesquer que sejam as taboas que se queira empregar, é indispensavel saber resolver os dois seguintes problemas : 1º Achar o logarithmo de uma linha trigonometrica correspondente a um arco dado ; 2º achar o mais pequeno arco correspondente a uma linha trigonometrica cujo logarithmo é conhecido. Vamos resolver estes dois problemas primeiramente com as taboas de F. I. C. e depois com as de Dupuis.

Problema I. — *Achar o logarithmo de uma linha trigonometrica correspondente a um arco dado :*

Se o arco fosse maior que 90º, seria preciso antes de tudo reduzil-o ao 1º quadrante (nº 15) ; tomemos pois um arco menor que 90º. Seja, por exemplo, achar :

1º O logarithmo de sen 29º17′47″.

Sendo o arco menor do que 45º, é preciso procurar o numero dos gráos no alto das paginas, e n'aquella em que se acha 29º, seguir descendo a 1ª columna á esquerda até á linha 17′. A taboa dá em frente o logarithmo de sen 29º17′, que é $\bar{1},68942$. A differença tabular 23, collocada entre este logarithmo e o logarithmo immediatamente superior, indica que se o arco augmentasse de 60″, o logarithmo augmentaria de 23 unidades da 5ª ordem decimal ; considerando esses dois accrescimos como sendo sensivelmente proporcionaes, conclúe-se que o logarithmo achado deve ser augmentado dos $\frac{47}{60}$ de 23 ou de 18 unidades da 5ª ordem decimal. Logo, o logarithmo que se procura é $\bar{1},68990$.

O calculo dispõe-se do modo seguinte :

$$\begin{array}{lr} \log \text{sen } 29°17' = & \bar{1},68942 \\ \text{para} \quad 47'' & 18 \\ \hline \log \text{sen } 29°17'47'' = & \bar{1},68960 \end{array} \qquad \frac{23 \times 47}{60} = 18$$

As taboas das partes proporcionaes juntas ás taboas de Dupuis dispensam de fazer a multiplicação e a divisão indicadas. Eis como se faz este mesmo calculo :

$$\begin{array}{lr} \log \text{sen } 29°17'40'' = & \bar{1},6895733 \\ \text{para} \quad 7'' & 263 \\ \hline \log \text{sen } 29°17'47'' = & \bar{1},6895996 \end{array} \qquad \text{Diff. } 376$$

2º *Achar o logarithmo de* cos 54º29′22″,5.

Sendo o arco maior que 45º, é preciso procurar o numero dos gráos no fim das paginas, e n'aquella em que se achar 54º, subir a primeira columna á direita até á linha 29′. A taboa dá em frente o logarithmo de cos 54º29′, que é $\bar{1},76413$, e a differença tabular 18. Conclúe-se, como

cheias de erros; seria, pois, ter uma idéa falsa o considerar como sendo exactos os dados introduzidos na maior parte dos problemas. Exceptuando os comprimentos e os angulos medidos para os calculos de triangulação e as medidas dadas por certos instrumentos de physica, os comprimentos são muito difficeis de se obter com quatro algarismos exactos, e os angulos com uma approximação de mais de meio minuto. Os dados, porém, de um problema devem ser tratados como se fossem exactos.

no caso precedente, que se o arco augmentasse de 60″, o log. diminuiria de 18 unidades da quinta ordem decimal. Por conseguinte, um accrescimo de 22″,5 ha de corresponder a uma diminuição dos $\frac{22,5}{60}$ de 18 ou 7 unidades da quinta ordem decimal. O log. que se procura é pois $\bar{1},76406$. Eis a disposição do calculo :

$$\begin{array}{lr} \log \cos 54°29' = & \bar{1},76413 \\ \text{para} \quad 22'',5 & -7 \\ \log \cos 54°29'22'',5 = & \bar{1},76406 \end{array} \qquad \frac{-18 \times 22,5}{60} = -7$$

Com as taboas de Dupuis, póde-se dispôr o calculo assim :

$$\begin{array}{lr} \log \cos 54°29'20'' = & \bar{1},7640721 \\ \text{para} \quad 2'',5 & -74 \\ \hline \log \cos 54°29'22'',5 = & \bar{1},7640647 \end{array} \qquad \text{Diff. } 295$$

Problema II. — *Achar o mais pequeno arco correspondente a uma linha trigonometrica dada.*

1º Seja, por exemplo, achar o arco x tal que :

$$\log \text{tg}\, x = \bar{1},87543$$

Na columna das tangentes, acha-se que o log. immediatamente inferior ao log. dado é $\bar{1},87527$; elle corresponde ao arco de 36º53′, e a differença tabular é de 26 unidades da quinta ordem decimal. Ora, o log. proposto excede o da taboa de 16 ; se designarmos por d o numero de segundos que será preciso ajuntar a 36º53′, poderemos escrever a proporção $\frac{d}{60} = \frac{16}{26}$, do que resulta $d = \frac{16 \times 60}{26} = 36$. O angulo que se procura $x = 36°53'36''$. Ordinariamente o calculo se dispõe assim :

$$\begin{array}{lr} \log \text{tg}\, x = & \bar{1},87543 \\ \log \text{tg}\, 36°53' = & \bar{1},87527 \\ \hline \text{para } 36'' & 16 \end{array} \qquad \frac{16 \times 60}{26} = 36$$

$$x = 36°53'36''$$

Servindo-nos das taboas de Dupuis, as partes proporcionaes abreviam o calculo. Eis como se dispõe a operação :

$$\begin{array}{lrr} \log \text{tg}\, x = & \bar{1},8754328 & \text{Diff. } 439 \\ \log \text{tg } 36°53'30'' = & \bar{1},8754050 & 278 \\ \text{para } 6'' & 263 & 15 \\ \text{para } 0,3 & 13 & 2 \\ \text{para } 0,05 & 2 & \\ \hline \log \text{tg } 36°53'36'',35 = & \bar{1},8754328 & \end{array}$$

2º Seja tambem : $\log \cos x = \bar{1},65441$

Procurando na taboa dos cosenos, acha-se que o log. dado está comprehendido entre o log. de cos 63º10′ e o de 63º11′ ; o arco procurado é pois igual a 63º10′, augmentado de uma quantidade proporcional á diffe

rença tabular — 25. Ora, a differença entre o log. cos 63°10′ e o log. dado é — 14; por conseguinte, ha de ser preciso ajuntar a 63°10′ a quantidade $\frac{14 \times 60}{25} = 34''$, e o arco que se procura é $x = 63°10'34''$.

O mesmo calculo, feito com as taboas de Dupuis, póde-se escrever :

	log cos $x = \overline{1},654\,4147$		
Diff. 416	para	335	63°10′30″
	1ª differença	188	
	para	167	4″
	2ª differença	21	
	para	21	0″,5
			$x = 63°10'34'',5$

Opera-se do mesmo modo para as outras linhas trigonometricas : para as tg, fazem-se os mesmos calculos que para os senos, e para as cotg, os mesmos calculos que para os cosenos.

Observação. — Nas instrucções que acompanham todas as taboas de logarithmos, encontram-se meios especiaes para se obter com exactidão os log. dos sen e das tg dos arcos muito pequenos, e os dos cos e das cotg dos arcos muito proximos de 90°; é util conhecer esses meios, e em certos casos convém consultal-os; mas para isso são precisas certas explicações que não têm cabimento n'este logar.

Applicações

1° *Calcular o mais pequeno arco positivo que satisfaça á equação :*

$$\text{sen}\, x = \frac{2}{3}$$

Applicando os logarithmos, temos :

$$\log \text{sen}\, x = \log 2 - \log 3$$

ou $\log \text{sen}\, x = 0,301\,0300 - 0,477\,1212 = \overline{1},823\,9088$

Ora temos : $\log \text{sen}\, 41°48'30'' = \overline{1},823\,8919$ (Diff. 236.)

Achamos 7″ para 169

Logo $x = 41°48'37''$

2° *Avaliar o menor arco positivo que satisfaça á equação :*

$$\cos x = -\frac{3}{4}$$

Seja y o supplemento d'este angulo; os cos de dois angulos supplementares são iguaes e de signaes contrarios, temos pois :

$\cos y = -\cos x = \frac{3}{4}$; d'onde $\log \cos y = \log 3 - \log 4$

$$\log 3 = 0,477\,1212$$
$$\log 4 = 0,602\,0600$$
$$\log \cos y = \overline{1},875\,0612$$

d'onde $y = 41°14'34'',6$

Por conseguinte $x = 180° - y = 138°35'25'',4$

3° *Achar o menor valor positivo de x que satisfaça á equação :*

$$\text{tg}\, x = +\sqrt{2}$$

Applicando os logarithmos, temos :

$$\log\, \text{tg}\, x = \frac{1}{2} \log 2 = 0,150\,5150$$

que corresponde a

$$x = 54°44'8''$$

4° *Calcular o angulo x comprehendido entre 0° e 90° que satisfaça á equação sen x = sen P + sen Q, no caso em que P = 28°19′37″,4 e Q = 16°47′3″,6.*

Sabemos que $\text{sen}\, P + \text{sen}\, Q = 2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(P + Q) \cos \frac{1}{2}(P - Q)$

Logo $\text{sen}\, x = 2\, \text{sen}\, \frac{1}{2}(45°6'41'') \cos \frac{1}{2}(11°32'33'',8)$

d'onde $= 2\, \text{sen}\, 22°33'20'',5 \cos 5°46'16'',9$

d'onde $\log \text{sen}\, x = \log 2 + \log \text{sen}\, 22°33'20'',5 + \log \cos 5°46'16'',9$

$$\log 2 = 0,301\,0300$$
$$\log \text{sen}\, 22°33'20'',5 = \overline{1},583\,8574$$
$$\log \cos 5°46'16'',9 = \overline{1},997\,7931$$
$$\log \text{sen}\, x = \overline{1},882\,6805$$

logo $x = 49°45'13''$

5° *Calcular o angulo x tal que tang x = tang A + tang B, sabendo que A = 38°24′30″ e B = 49°19′40″.*

Temos : $\text{tg}\, x = \text{tg}\, A + \text{tg}\, B$ ou (n° 48, formula 28) :

$$\text{tg}\, x = \frac{\text{sen}\,(A + B)}{\cos A \cos B}$$

portanto, applicando os logarithmos :

$$\log \text{tg}\, x = \log \text{sen}\,(A + B) - \log \cos A - \log \cos B$$

ou $\log \text{sen}\,(A + B) = \log \text{sen}\, 87°44'10'' = \overline{1},999\,6609$

(Substituem-se os log negativos pelos colog)

$$\text{colog} \cos A = 0,105\,9039$$
$$\text{colog} \cos B = 0,185\,9318$$
$$\log \text{tg}\, x = 0,291\,4966$$

Logo $x = 62°55'42'',8$

6° *Calcular o valor de x dado pela formula*

$$x = R\sqrt{\text{sen}^2 \alpha\, \text{sen}^2 \beta - \cos^2 \alpha \cos^2 \beta}$$

na qual temos $R = 6\,366^m,73$, $\alpha = 67°42'28''$, $\beta = 48°53'47''$.

Tornemos logarithmica a quantidade debaixo do radical; é a differença de dois quadrados, logo podemos escrever :

$$(\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta + \cos\alpha\cos\beta)\,(\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta - \cos\alpha\cos\beta)$$

ou

$$\cos(\alpha-\beta)\cos[\pi-(\alpha+\beta)]$$

Para que o valor de x seja real, é preciso que estes dois factores sejam do mesmo signal; ora, essa condição está satisfeita, porque, segundo os dados, elles são ambos positivos.

Logo $$\log x = \log R + \frac{\log\cos(\alpha-\beta)+\log\cos[\pi-(\alpha+\beta)]}{2}$$

isto é

$$\log x = \log 6\,366{,}73 + \frac{1}{2}(\log\cos 18°49'11'' + \log\cos 63°24'15'')$$

$$\begin{aligned}
\log\cos(\alpha-\beta) &= \bar{1},976\,1382\\
\log\cos[\pi-(\alpha+\beta)] &= \bar{1},650\,9814\\
&\overline{\quad 1,627\,1196}\\
\text{a metade} &= \bar{1},813\,5598\\
\log R &= 3,803\,9164\\
\log x &= 3,617\,4762\\
x &= 4144^{m},54
\end{aligned}$$

Limite ou verdadeiro valor de algumas expressões trigonometricas.

Julgamos util recordar aqui algumas definições dadas no estudo da algebra.

Definições. — 1° *Diz-se que uma variavel tende para zero quando seu valor absoluto torna-se e fica depois constantemente inferior a qualquer numero dado, por menor que seja.*

2° *Diz-se que uma variavel tende para o infinito quando seu valor absoluto torna-se e fica depois constantemente superior a qualquer numero dado, por maior que seja.*

3° *Diz-se que uma variavel* x *tende para* a, *ou tem por limite* a, *quando a differença* x — a *tende para zero.*

Assim, ε designando um numero positivo dado, tão pequeno quanto se queira : se acabarmos por ter constantemente em valor absoluto

$$x - a < \varepsilon$$

podemos escrever $$\lim.\, x = a$$

4° *Diz-se que uma funcção* y *de uma variavel* x *tem por limite* b *para* x = a, *quando* x — a *tendendo para zero,* y — b *tende tambem para zero.*

5° *Diz-se que uma funcção* y *de uma variavel* x *é infinita para* x = a, *quando* x — a *tendendo para zero,* y *tende para o infinito.*

Principio. — *Se duas variaveis são constantemente iguaes, e uma d'ellas tende para um limite, a outra tambem tende para um limite, e esses dois limites são iguaes*

Consequencia. — *Se uma igualdade entre duas funcções de* x *conserva-se constantemente verdadeira quando* x *tende para* a, *ella ainda é verdadeira no limite para* x = a.

Theorema. — *O limite de* $\frac{\text{sen}\,x}{x}$, *para* x = 0, *é igual á unidade.*

Supponhamos que o arco x tende para zero por valores positivos, temos (n° 52) $$\text{sen}\,x < x < \text{tg}\,x.$$

Dividindo sen x por estas tres quantidades crescentes, obtem-se as razões descrescentes

$$\frac{\text{sen}\,x}{\text{sen}\,x} > \frac{\text{sen}\,x}{x} > \frac{\text{sen}\,x}{\text{tg}\,x}$$

ou

$$1 > \frac{\text{sen}\,x}{x} > \cos x$$

Assim, a differença $1-\frac{\text{sen}\,x}{x}$ é menor que a differença $1-\cos x$; ora, quando x tende para zero, esta ultima differença tende para zero; logo, com maior razão, a primeira tende tambem para zero; isto é, temos

$$\lim\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

Quando um arco tende para zero, a razão do seno ao arco tem por limite a unidade.

Observação. — As razões inversas $\frac{\text{sen}\,x}{x}$ e $\frac{x}{\text{sen}\,x}$ tendem simultaneamente para a unidade (n° 52) : a primeira por meio de valores crescentes, a segunda por valores descrescentes.

Corollario I. — *Quando um arco tende para zero a razão da corda para o arco tende para a unidade.*

Sejam arco MM' $= 2x$ d'onde corda MM' $= 2$ sen x.

Temos identicamente

$$\frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'} = \frac{2\,\text{sen}\,x}{2x} = \frac{\text{sen}\,x}{x}$$

Esta igualdade ficando sempre verdadeira quando x tende para zero, tambem é ella verdadeira no limite, para $x = 0$:

$$\lim.\frac{\text{corda MM}'}{\text{arco MM}'} = \lim.\frac{\text{sen}\,x}{x} = 1$$

Corollario II. — *O limite de* $\frac{\text{tg}\,x}{x}$, *para* x = 0, *é igual á unidade.*

Temos identicamente

$$\frac{\text{tg}\,x}{x} = \frac{\text{sen}\,x}{x}\cdot\frac{1}{\cos x}$$

Esta igualdade, verdadeira para qualquer valor de x, tambem o é no

limite, para $x=0$. Substituindo simultaneamente cada factor por seu limite, obtemos

$$\lim.\frac{\operatorname{tg}x}{x}=\lim.\frac{\operatorname{sen}x}{x}.\lim.\frac{1}{\cos x}=1\times 1=1$$

Verdadeiro valor de uma funcção que se apresenta debaixo de uma das fórmas indeterminadas $\frac{0}{0}, 0\times\infty, \infty-\infty$.

Quando uma funcção de x *toma uma fórma indeterminada para* $x=a$, *chama-se verdadeiro valor d'esta funcção para* $x=a$ *o limite para o qual tende esta funcção quando* x *tende para* a.

Tirar a indeterminação, é achar esse limite.

Quando uma expressão fraccionaria toma a fórma $\frac{0}{0}$ para $x=a$, isso provém geralmente de que seus dois termos têm um factor commum que se annulla por $x=a$. Supprimindo este factor commum, obtem-se uma nova fracção que, sendo constantemente igual á primeira quando x tende para a, tambem lhe é igual no limite, para $x=a$. Ora, em geral, a nova fracção toma, para $x=a$, um valor bem determinado. Esse valor é o limite da funcção proposta para $x=a$.

Para obter o verdadeiro valor de uma expressão, nos casos elementares, basta, pois, simplificar esta expressão ou transformal-a em uma utra equivalente, antes de lhe impor a hypothese $x=a$.

Algumas vezes é necessario pôr em evidencia as razões.

$$\frac{\operatorname{sen}(x-a)}{x-a},\quad \frac{\operatorname{tg}(x-a)}{x-a},$$

ou suas inversas, que têm por limite a unidade quando x tende para a.

Eis alguns exemplos :

I. *Valor da expressão*

$$y=\frac{1-\cos x}{\operatorname{tg}x},\ \text{para } x=0$$

Se fizermos $x=0$, esta expressão toma a fórma $\frac{0}{0}$; mas as identidades

$$1-\cos x=2\operatorname{sen}^2\frac{x}{2}\quad \text{e}\quad \operatorname{tg}x=\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}}{\cos x}$$

permittem que se escreva

$$y=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}\cos x}{\cos\frac{x}{2}}=\operatorname{tg}\frac{x}{2}\cos x$$

Logo, para $x=0$, $\quad \lim.\ y=0\times 1=0$

II. *Valor da expressão*

$$y=\frac{1-\cos 4x}{1-\cos 2x}\ \text{para}\ x=0$$

Temos identicamente (nº 39) :

$$y=\frac{2\operatorname{sen}^2 2x}{2\operatorname{sen}^2 x}=\frac{4\operatorname{sen}^2 x\cos^2 x}{\operatorname{sen}^2 x}=4\cos^2$$

Logo, para $x=0$, $\quad \lim.\ y=4\times 1=4$

III. *Valor da expressão*

$$y=\frac{\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 a}{\operatorname{sen}(x-a)}\ \text{para}\ x=a$$

Na hypothese de $x=a$, a expressão se apresenta debaixo da fórma $\frac{0}{0}$; mas a identidade (pag. 58, 5º)

$$\operatorname{sen}^2 x-\operatorname{sen}^2 a=\operatorname{sen}(x+a)\operatorname{sen}(x-a)$$

permitte que se escreva $\quad y=\operatorname{sen}(x+a)$

Logo, para $x=a$. $\quad \lim.\ y=\operatorname{sen}2a$

IV. *Valor da expressão*

$$y=\frac{\operatorname{sen}2x-\operatorname{sen}2a}{\cos a-\cos x}\ \text{para}\ x=a$$

Em virtude das fórmulas (22 e 27) póde-se escrever

$$y=\frac{\cos(x+a)\operatorname{sen}(x-a)}{\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}$$

ou, dividindo os valores superiores e inferiores por $\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}$:

$$y=\frac{2\cos(x+a)\cos\frac{x-a}{2}}{\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}}$$

Logo, para $x=a$,

$$\lim.\ y=\frac{2\cos 2a\times 1}{\operatorname{sen}a}=\frac{2\cos 2a}{\operatorname{sen}a}$$

V. *Valor da expressão*

$$y=\frac{\cos x}{1-\operatorname{sen}x}\ \text{para}\ x=90^\circ$$

Esta expressão toma a fórma $\frac{0}{0}$; mas póde-se primeiro escrever :

$$y=\frac{\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}{1-\operatorname{sen}x}$$

ou, supprimindo o factor $\sqrt{1-\operatorname{sen}x}$

$$y=\sqrt{\frac{1+\operatorname{sen}x}{1-\operatorname{sen}x}}$$

Para $x=90°$, obtem-se $y=\sqrt{\frac{2}{0}}$

Logo, quando x tende para 90°, a funcção y tende para o infinito.

VI. *Valor da expressão*

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{nx} \text{ para } x=0$$

Póde-se escrever :

$$\frac{\operatorname{sen} mx}{nx}=\frac{m}{n}\cdot\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}$$

Ora para $x=0$, $\lim.\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}=1$

Por conseguinte, $\lim.\frac{\operatorname{sen} mx}{nx}=\lim\frac{m}{n}\cdot\frac{\operatorname{sen} mx}{mx}=\frac{m}{n}$

VII. *Valor da expressão*

$$y=\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} a}{x-a} \text{ para } x=a$$

Temos identicamente

$$y=\frac{2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}}{x-a}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}}{\frac{x-a}{2}}.\cos\frac{x+a}{2}$$

Logo, para $x=a$,

$$\lim.\ y=1\times\cos\frac{a+a}{2}=\cos a$$

VIII. *Valor da expressão*

$$\sec x-\operatorname{tg} x \quad \text{para} \quad x=90°$$

Se fizermos $x=90°$, a expressão toma a fórma indeterminada $\infty-\infty$; mas temos identicamente

$$\sec x-\operatorname{tg} x=\frac{1}{\cos x}-\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}$$

Logo (Exemplo II), para $x=90°$, temos :

$$\lim.\ (\sec x-\operatorname{tg} x)=\lim.\frac{1-\operatorname{sen} x}{\cos x}=0$$

IX. *Valor da expressão*

$$\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1} \quad \text{para} \quad x+90°$$

Se substituirmos x por 90°, esta expressão toma a fórma $\frac{\infty}{\infty}$; mas dividindo primeiramente os valores superiores e inferiores por $\operatorname{tg} x$, e fazendo depois $x=90°$, temos :

$$\lim\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=\lim\frac{1+\frac{1}{\operatorname{tg} x}}{1-\frac{1}{\operatorname{tg} x}}=1$$

Além d'isto, temos identicamente :

$$\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=-\frac{1+\operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg} x}=-\operatorname{tg}(45°+x)$$

Logo, para $x=90°$,

$$\lim\frac{\operatorname{tg} x+1}{\operatorname{tg} x-1}=-\operatorname{tg} 135°=\operatorname{tg} 45°=1$$

X. *Limite da razão* $\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}$ *quando* h *tende para* 0.

Podemos escrever :

$$\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=\frac{2\operatorname{sen}\frac{h}{2}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{h}=\frac{\operatorname{sen}\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)$$

Logo, para $h=0$,

$$\lim\frac{\operatorname{sen}(x+h)-\operatorname{sen} x}{h}=1\times\cos x=\cos x$$

Tal é o limite da razão do accrescimo do seno para o accrescimo do arco, quando este ultimo accrescimo tende para zero.

Acha-se do mesmo modo, para $h=0$,

$$\lim\frac{\cos(x+h)-\cos x}{h}=\operatorname{sen} x$$

e

$$\lim\frac{\operatorname{tg}(x+h)-\operatorname{tg} x}{h}=\frac{1}{\cos^2 x}$$

CAPITULO IV

EQUAÇÕES TRIGONOMETRICAS

Expressões equivalentes. — Diz-se que duas expressões trigonometricas são *equivalentes*, quando seus valores numericos são sempre iguaes, quaesquer que sejam os valores attribuidos aos arcos que ellas contêm.

Duas especies de igualdades. — O signal $=$, collocado entre duas expressões trigonometricas, significa que essas expressões são equivalentes, ou então que ellas tomam valores iguaes para certos valores especiaes attribuidos aos arcos que ellas contêm.

D'isso resultam duas sortes de igualdades, as *identidades* e as *equações*.

Identidade. — *Uma identidade trigonometrica é a igualdade de duas expressões trigonometricas equivalentes.*

As fórmulas fundamentaes, as fórmulas de addição, de multiplicação, de transformação logarithmica... e todas as igualdades que podem d'ellas ser deduzidas por meio de calculo, são identidades.

Equação. — *Uma equação trigonometrica é uma igualdade que comprehende uma ou mais linhas trigonometricas de arcos incognitos, a qual se verificam sómente para certos valores especiaes attribuidos a esses arcos.*

A igualdade

$$\operatorname{tg} x = 1$$

é uma equação; ella só é compensada por $x = 45°$ e pelos diversos arcos que têm a mesma tangente.

Resolver uma equação trigonometrica de uma incognita, é procurar os valores do arco incognito que tornam iguaes seus dois membros. Cada um d'esses arcos é uma *solução* da equação.

As soluções de uma equação trigonometrica são *em numero infinito*; se contarmos, porém, todos esses arcos a partir de uma unica origem, suas extremidades acham-se geralmente situadas em um numero finito de pontos do circulo trigonometrico.

Resolver um systema de n equações trigonometricas de n incognitas, é achar os diversos systemas de valores das incognitas os quaes verificam simultaneamente todas essas equações.

§ I. — Equações a uma incognita.

O methodo que geralmente se emprega para resolver uma equação trigonometrica consiste em transformal-a em uma equação algebrica tomando uma linha trigonometrica para incognita auxiliar.

1º Escolhe-se como incognita uma linha trigonometrica do arco incognito, ou uma linha trigonometrica de um multiplo ou de um submultiplo d'esse arco, ou de qualquer outro arco cujo conhecimento acarretaria o do arco procurado.

2º Substitue-se, em funcção da incognita adoptada, todas as outras linhas trigonometricas que figuram na equação.

3º Por meio dos processos ordinarios de algebra, resolve-se a equação final em relação á incognita auxiliar, e discutem-se as raizes attendendo-se ás condições de grandeza ás quaes se acha sujeita essa linha trigonometrica.

4º Cada uma das raizes aceitaveis fornece uma equação trigonometrica simples, de uma das fórmas

$$\operatorname{sen} x = a, \qquad \cos x = b, \qquad \operatorname{tg} x = c$$

Por meio das taboas determina-se um angulo verificando cada uma d'esses equações (nº 6 e pag. 70); depois d'isso, as fórmulas dos arcos tendo uma linha trigonometrica dada (nº 20 e seguintes) permitte escrever todas as soluções.

Eis alguns exemplos:

I. Resolver a equação

$$3 \operatorname{tg}^2 x + 5 = \frac{7}{\cos x} \qquad (1)$$

1º Methodo. Se tomarmos por incognita $\cos x$ e se substituirmos $\operatorname{tg} x$ em funcção de $\cos x$, esta equação fica sendo

$$\frac{3(1-\cos^2 x)}{\cos^2 x} + 5 = \frac{7}{\cos x}$$

ou

$$\frac{2\cos^2 x - 7\cos x + 3}{\cos^2 x} = 0$$

ou, supprimindo o denominador que não póde tornar-se infinito

$$2\cos^2 x - 7\cos x + 3 = 0$$

Em relação a $\cos x$, esta equação algebrica do segundo grão tem como raizes 3 e $\frac{1}{2}$. Aquella, superior á unidade, é estranha á questão. A equação proposta equivale pois á equação unica $\cos x = \frac{1}{2}$

Esta equação é satisfeita por $x = 60°$, e por conseguinte, por todos os arcos comprehendidos nas fórmulas (G)

$$x = 2k\pi \pm 60°$$

2º Methodo. Se substituirmos $\cos x$ em funcção de $\operatorname{tg} x$, a equação torna-se

$$3\operatorname{tg}^2 x+5=\pm 7\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \qquad (2)$$

esta equação, porém, não é equivalente á proposta; pois, com as soluções d'esta, ella admitte mais as soluções da equação

$$3\operatorname{tg}^2 x+5=-\frac{7}{\cos x} \qquad (3)$$

Elevando ao quadrado os dois membros de (2), chega-se á equação

$$9\operatorname{tg}^4 x-19\operatorname{tg}^2 x-24=0$$

da qual se tira $\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{\frac{19\pm\sqrt{1225}}{18}}$

ou, eliminando as raizes imaginarias

$$\operatorname{tg} x=\pm\sqrt{3}$$

fica emfim $x=k\pi\pm 60 \qquad (4)$

Os primeiros membros das equações (1) e (3) sendo essencialmente positivos, e seus segundos membros sendo de signaes contrarios, uma solução comprehendida nas fórmulas (4) convém á equação (1) ou á equação (3), conforme ella torna positivo $\cos x$ ou $-\cos x$, isto é conforme o coseno do arco considerado é positivo ou negativo.

Ora, os arcos comprehendidos nas fórmulas (4), terminam em quatro pontos do circulo trigonometrico, respectivamente situados em cada um dos quadrantes. Os arcos

$$(2k+1)\pi\pm 60$$

cujas extremidades cahem no segundo e no terceiro quadrante têm seus cosenos negativos e devem ser rejeitados.

Os arcos $2k\pi\pm 60$

terminados no primeiro e no quarto quadrante são os unicos que respondem á questão.

II. Resolver a equação

$$2\cos x+3=4\cos\frac{x}{2} \qquad (1)$$

1º Methodo. Toma-se para incognita $\cos\frac{x}{2}$.

Substituindo $\cos x=2\cos^2\frac{x}{2}-1$

a equação torna-se

$$4\cos^2\frac{x}{2}-4\cos\frac{x}{2}+1=0$$

d'onde $\cos\frac{x}{2}=\frac{1}{2}$

Mas $\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$

Logo $\frac{x}{2}=2k\pi\pm 60^\circ$

e emfim $x=4k\pi\pm 120^\circ$

2º methodo. Se tomarmos por incognita $\cos x$, é preciso effectuar a substituição irracional

$$\cos\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

obtem-se $2\cos x+3=\pm 4\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}} \qquad (2)$

Mas esta equação é mais geral do que a proposta; pois, com as soluções de (1), ella admitte tambem as da equação

$$2\cos x+3=-4\cos\frac{x}{2} \qquad (3)$$

Elevando ao quadrado os dois membros de (2), chega-se á equação

$$4\cos^2 x+4\cos x+1=0$$

d'onde $\cos x=-\frac{1}{2}$

e por conseguinte $x=2k\pi\pm 120^\circ$

Um arco x comprehendido n'esta fórmula verifica a equação (1) ou a equação (3), segundo que $\cos\frac{x}{2}$ é positivo ou negativo. Ora, os arco metades $\frac{x}{2}=k\pi\pm 60^\circ$

terminam no primeiro ou no quarto quadrante quando k é um numero par, e no segundo ou no terceiro quadrante quando k é impar. Portanto as soluções de (1), dadas pelos valores pares do numero k acham-se comprehendidas na fórmula $x=4k'\pi\pm 120^\circ$ k' designando um numero inteiro qualquer.

Observação. Se compararmos entre si os dois methodos seguidos nos exemplos I e II, é evidente que as substituções irracionaes devem ser evitadas.

III. Resolver a equação

$$3(1-\cos x)=\operatorname{sen}^2 x$$

1º methodo. A expressão de $\cos x$ em funcção de $\operatorname{sen} x$ é irracional, emquanto que $\operatorname{sen}^2 x$ exprime-se racionalmente em funcção de $\cos x$. Das duas linhas $\operatorname{sen} x$ e $\cos x$, é pois a segunda que é preferivel escolher para incognita.

A equação fica sendo

$$\cos^2 x-3\cos x+2=0$$

d'ella extrahe-se

$$\cos x = \frac{3 \pm 1}{2}$$

ou rejeitando a raiz inacceitavel

$$\cos x = 1$$

resulta

$$x = 2k\pi$$

2° METHODO. Podemos substituir

$$1 - \cos x = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \quad \text{e} \quad \operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$$

A equação toma a fórma

$$2 \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2} \left(3 - 2 \cos^2 \frac{x}{2}\right) = 0$$

O factor entre parenthesis não póde annullar-se, visto que um coseno acha-se comprehendido entre -1 e $+1$.

A equação proposta reduz-se pois a

$$\operatorname{sen} \frac{x}{2} = 0$$

d'onde

$$\frac{x}{2} = k\pi$$

e emfim

$$x = 2k\pi$$

IV. **Resolver a equação**

$$\sec x - \cos x = \operatorname{sen} x \qquad (1)$$

1° METHODO. As tres linhas trigonometricas $\operatorname{sen} x$, $\cos x$, $\sec x$ não podem ser expressas racionalmente em funcção de uma mesma linha do arco x, mas ellas podem sêl-o em funcção de $\operatorname{tg} \frac{x}{2}$ (nº 38).

Tomando esta ultima linha para incognita, a equação torna-se

$$\frac{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} - \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}} = 0$$

ou, reduzindo ao mesmo denominador

$$\frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} \left(\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1\right)}{\left(1 - \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)\left(1 + \operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}\right)} = 0$$

Esta equação equivale ao conjuncto das tres seguintes

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 0 \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} = k\pi \quad \text{d'onde} \quad x = 2k\pi$$

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = \pm \infty \quad \text{ou} \quad \frac{x}{2} k\pi = + \frac{\pi}{2} \quad \text{d'onde} \quad x = (2k+1)\pi$$

e

$$\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} + 2 \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 1 = 0$$

d'onde

$$\operatorname{tg} \frac{x}{2} = -1 \pm \sqrt{2}$$

isto é (nº 36, form. 16)

$$\operatorname{tg} x = 1$$

por conseguinte

$$x = k\pi + 45°$$

2° METHODO. Se substituirmos $\sec x$ em funcção de $\cos x$, chegamos á equação

$$\frac{1 - \cos^2 x - \operatorname{sen} x \cos x}{\cos x} = 0$$

ou, substituindo $1 - \cos^2 x$ por $\operatorname{sen}^2 x$, pondo $\operatorname{sen} x$ em factor e effectuando a divisão

$$\operatorname{sen} x (\operatorname{tg} x - 1) = 0$$

esta equação decompõe-se em outras duas :

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi$$

e

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi + 45°$$

Artificios de calculo. Abandona-se o methodo geral desde que se apresenta um meio especial que leve ao resultado de um modo mais rapido. O habito de calcular dá a perceber esses processos expeditos.

Assim, o segundo methodo indicado para resolver cada uma das duas equações precedentes consiste em transformar o primeiro membro em um producto de muitos factores, depois, em decompôr a equação proposta em outras tantas equações parciaes.

Eis mais alguns exemplos :

V. **Resolver a equação**

$$\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x$$

1° METHODO. Em logar de substituir $\operatorname{sen} 3x$ em funcção de $\operatorname{sen} x$, façamos passar tudo para o primeiro membro, transformemos depois este em producto. A equação torna-se

$$2 \cos 2x \operatorname{sen} x = 0$$

elle decompõe-se em outras duas :

$$\cos 2x = 0 \quad \text{d'onde} \quad 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}$$

e

$$\operatorname{sen} x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi$$

2° METHODO. Para exprimir que os arcos x e $3x$ têm senos iguaes, basta applicar-lhes as fórmulas conhecidas (E).

Obtem-se assim as duas equações algebricas independentes

$$3x = 2k\pi + x \quad \text{e} \quad 3x = (2k+1)\pi - x$$

d'ond se tira respectivamente

$$x = k\pi \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

VI. Resolver a equação

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) = \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$$

1° METHODO. Esta equação póde-se escrever

$$\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{6}\right) - \operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{3}\right) = 0$$

ou (nº 48)

$$\frac{\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)}{\cos\left(2x - \frac{\pi}{6}\right)\cos\left(x + \frac{\pi}{3}\right)} = 0$$

ou simplesmente

$$\operatorname{sen}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = 0$$

d'ella tira-se

$$x - \frac{\pi}{2} = k\pi$$

d'onde

$$x = (2k+1)\frac{\pi}{2}$$

2° METHODO. Para que dois arcos tenham a mesma tangente, é preciso e sufficiente que sua differença seja igual a $k\pi$ (nº 21).

A equação proposta equivale pois á equação algebrica

$$\left(2x - \frac{\pi}{2}\right) - \left(x + \frac{\pi}{3}\right) = k\pi$$

ue dá

$$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

VII. Resolver a equação

$$\cos 3x - \cos 2x + \cos x = 0$$

Se transformarmos $\cos 3x + \cos x$ em producto, a equação fica sendo

$$2\cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$$

ou

$$\cos 2x\,(2\cos x - 1) = 0$$

Ella se decompõe em duas equações parciaes que se resolvem separadamente.

VIII. Resolver a equação

$$\cos a - \cos x = \operatorname{sen}(x - a)$$

Transformando o primeiro membro em producto e substituindo o

segundo em funcção do seno e do coseno do arco $\frac{x-a}{2}$ a equação póde escrever-se

$$2\operatorname{sen}\frac{x+a}{2}\operatorname{sen}\frac{x-a}{2} = 2\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\cos\frac{x-a}{2}$$

ou

$$\operatorname{sen}\frac{x-a}{2}\left(\operatorname{sen}\frac{x+a}{2} - \cos\frac{x-a}{2}\right) = 0$$

Ella se decompõe em outras duas faceis de resolver.

Applicações importantes.

IX. Resolver e discutir a equação

$$a\operatorname{sen} x + b\cos x = c$$

1° METHODO. Com o fim de tornar logarithmico o primeiro membro, dividem-se todos os termos da equação por a, depois põe-se

$$\frac{b}{a} = \operatorname{tg}\varphi \tag{1}$$

A equação proposta torna-se successivamente

$$\operatorname{sen} x + \frac{b}{a}\cos x = \frac{c}{a}$$

e

$$\operatorname{sen} x + \frac{\operatorname{sen}\varphi}{\cos\varphi}\cos x = \frac{c}{a}$$

ou, eliminando o denominador

$$\operatorname{sen} x\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos x = \frac{c}{a}\cos\varphi$$

isto é

$$\operatorname{sen}(x+\varphi) = \frac{c}{a}\cos\varphi \tag{2}$$

Procura-se nas taboas um angulo φ que verifique a equação (1); depois d'isso, se as taboas dão um angulo α tendo por seno $\frac{c}{a}\cos\varphi$, a equação (2) traduz-se pelas duas equações algebricas

$$x + \varphi = 2k\pi + \alpha \quad \text{e} \quad x + \varphi = (2k+1)\pi - \alpha$$

d'onde se tira

$$x = 2k\pi + \alpha - \varphi \quad \text{e} \quad x = (2k+1)\pi - \alpha - \varphi$$

Condição de possibilidade. O angulo α só existe se houver

$$-1 \leq \frac{c}{a}\cos\varphi \leq +1$$

isto é

$$\frac{c^2\cos^2\varphi}{a^2} \leq 1$$

O valor de $\cos^2\varphi$ em funcção dos dados deduz-se da equação (1). Achamos

$$\cos^2\varphi = \frac{1}{1+\operatorname{tg}^2\varphi} = \frac{1}{1+\frac{b^2}{a^2}} = \frac{a^2}{a^2+b^2}$$

a condição de possibilidade torna-se

$$\frac{c^2}{a^2+b^2} \leqq 1$$

ou

$$c^2 \leqq a^2+b^2$$

ella é independente dos signaes dos tres coefficientes.

2º Methodo. Sen x e cos x podendo exprimir-se racionalmente em funcção de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$, toma-se esta ultima linha para incognita auxiliar; a equação fica sendo

$$a\frac{2\operatorname{tg}\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} + b\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}} = c$$

Ella equivale á equação inteira

$$(b+c)\operatorname{tg}^2\frac{x}{2} - 2a\operatorname{tg}\frac{x}{2} - (b-c) = 0$$

que tem como raizes

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2} = \frac{a \pm \sqrt{a^2+b^2-c^2}}{b+c}$$

as raizes são reaes quando temos

$$a^2+b^2 \leqq c^2$$

Ellas não estão sujeitas a nenhuma condição de grandeza; mas, como não são calculaveis por logarithmos, não se póde geralmente empregal-as senão depois de transformadas.

3º Methodo. Se substituirmos sen x e cos x em funcção de tg x, obtemos

$$a\operatorname{tg}x + b = \pm c\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x} \quad (3)$$

ou

$$(a^2-c^2)\operatorname{tg}^2 x + 2ab\operatorname{tg}x + b^2 - c^2 = 0$$

por conseguinte

$$\operatorname{tg}x = \frac{-ab \pm c\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2-c^2}$$

Mas, além d'essas fórmulas não serem logarithmos, ellas têm o inconveniente de serem demasiadamente geraes, pois a equação (3) equivale ao conjuncto das duas seguintes

$$a\operatorname{sen}x + b\cos x = \pm c$$

4º Methodo. Substituindo cos x em funcção de sen x, obter-se-hia

$$a\operatorname{sen}x \pm \sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x} = c$$

ou

$$(a^2+b^2)\operatorname{sen}^2 x - 2ac\operatorname{sen}x + c^2 - b^2 = 0$$

por conseguinte

$$\operatorname{sen}x = \frac{ac \pm b\sqrt{a^2+b^2-c^2}}{a^2+b^2}$$

Esta fórmula apresenta todas as desvantagens da precedente, porque não é logarithmica e resolve ao mesmo tempo as duas equações

$$a\operatorname{sen}x \pm b\cos x = c$$

Além d'isso, a condição de grandeza imposta a sen x vem complicar mais a discussão.

Assim, no caso geral, o primeiro methodo dado leva só a formulas logarithmicas, e cada uma das outras é menos vantajosa do que a precedente.

X. **Resolver a equação**

$$a\operatorname{tg}x + b\operatorname{cotg}x = c$$

1º Methodo. Dá-se a esta equação a fórma da precedente. Ella póde escrever-se

$$a\frac{\operatorname{sen}x}{\cos x} + b\frac{\cos x}{\operatorname{sen}x} = c$$

ou

$$a\operatorname{sen}^2 x + b\cos^2 x = c\operatorname{sen}x\cos x$$

Multiplicando os dois membros por 2 e effectuando as substituições

$$2\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos 2x, \quad 2\cos^2 x = 1+\cos 2x,$$
$$2\operatorname{sen}x\cos x = \operatorname{sen}2x$$

obtemos

$$a(1-\cos 2x) + b(1+\cos 2x) = c\operatorname{sen}2x$$

ou

$$c\operatorname{sen}2x + (a-b)\cos 2x = a+b$$

equação da mesma fórma que a precedente. (Ex. XI.)

2º Methodo. Substituindo cotg x em funcção de tg x, chega-se á equação do segundo grão

$$a\operatorname{tg}^2 x - c\operatorname{tg}x + b = 0$$

d'onde se tira

$$\operatorname{tg}x = \frac{c \pm \sqrt{c^2-4ab}}{2a}$$

Estas raizes são faceis de discutir; mas para deduzir-se d'ellas os valores correspondentes de x, é preciso primeiramente tornal-as logarithmicas.

XI. **Resolução trigonometrica da equação do segundo grão**

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Propomo-nos resolver esta equação por meio de uma equação trigonometrica

Escreve-se enta-se $x = \operatorname{tg} \alpha$ (1)

A equação torna-se

$$a \operatorname{tg}^2 \alpha + b \operatorname{tg} \alpha + c = 0$$

Para reduzir esta equação a uma fórma conhecida (Ex. IX), substitue-se $\operatorname{tg} \alpha$ em funcção de $\operatorname{sen} \alpha$ e de $\cos \alpha$, depois eliminam-se os denominadores; o que dá

$$a \operatorname{sen}^2 \alpha + b \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha + c \cos^2 \alpha = 0$$

Então multiplicam-se todos os termos por 2 e operam-se as substituições

$$2 \operatorname{sen}^2 \alpha = 1 - \cos 2\alpha, \qquad 2 \operatorname{sen} \alpha \cos \alpha = \operatorname{sen} 2\alpha,$$
$$2 \cos^2 \alpha = 1 + \cos 2\alpha$$

Agrupando os termos que contêm sómente uma linha trigonometrica

$$b \operatorname{sen} 2\alpha - (a - c) \cos 2\alpha + a + c = 0$$

equação da fórma annunciada.

Se dividirmos tudo por b e puzermos

$$\frac{a-c}{b} = \operatorname{tg} \varphi \qquad (2)$$

esta equação póde escrever-se

$$\operatorname{sen} 2\alpha - \frac{\operatorname{sen} \varphi}{\cos \varphi} \cos 2\alpha = -\left(\frac{a+c}{b}\right)$$

ou

$$\operatorname{sen} (2\alpha - \varphi) = -\frac{a+c}{b} \cos \varphi \qquad (3)$$

A condição de possibilidade

$$\frac{(a+c)^2}{b^2} \cos^2 \varphi \leq 1$$

por causa de (1), fica sendo

$$\frac{(a+c)^2}{b^2 + (a-c)^2} \leq 1$$

e reduz-se a

$$b^2 - 4ac \geq 0$$

se está preenchida esta condição, acha-se, por meio das taboas, um angulo φ_1, tendo o seno de $2\alpha - \varphi$; o que dá para soluções da equação (3)

$$2\alpha - \varphi = 2k\pi + \varphi_1, \qquad \text{e} \qquad 2\alpha - \varphi = (2k+1)\pi - \varphi_1$$

Fazendo $k = 0$ na primeira fórmula e $k = 1$ na segunda, teremos pois, depois de termos calculado φ por meio da equação (2)

$$\alpha' = \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \qquad \alpha'' = \frac{\varphi - \varphi_1}{2}$$

A equação (1) dá então as raizes procuradas

$$x' = \operatorname{tg} \frac{\varphi + \varphi_1}{2} \qquad \text{e} \qquad x'' = \operatorname{tg} \frac{\varphi - \varphi_1}{2}$$

§ II. Equações simultaneas.

XII. Problema. *Achar dois arcos, conhecendo sua somma assim como a somma ou o producto ou o quociente de seus senos.*

1° Resolver o systema.

$$\begin{cases} x + y = a & (1) \\ \operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = m & (2) \end{cases}$$

A equação (2) póde escrever-se (23)

$$2 \operatorname{sen} \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} = m$$

d'ella se tira, tendo em conta (1)

$$\cos \frac{x-y}{2} = \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \qquad (3)$$

Esta ultima equação exige

$$-1 \leq \frac{m}{2 \operatorname{sen} \frac{a}{2}} \leq +1$$

ou

$$\frac{m^2}{4 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}} \leq 1$$

isto é

$$m^2 \leq 4 \operatorname{sen}^2 \frac{a}{2}$$

Se esta condição é preenchida, a equação (3) determina um angulo $\frac{x-y}{2} = \alpha$, que se obtem por meio das taboas, ella se transforma depois em equação algebrica

$$\frac{x-y}{2} = 2k\pi = \alpha \qquad (4)$$

Além d'isso, a equação (1) póde escrever-se

$$\frac{x+y}{2} = \frac{a}{2} \qquad (5)$$

Ajuntando, depois subtrahindo (4) e (5) membro a membro, obtem-se

$$x = \frac{a}{2} + 2k\pi \pm \alpha$$

$$y = \frac{a}{2} - 2k\pi \mp \alpha$$

fórmulas nas quaes devemos attribuir a k o mesmo valor e collocar signaes contrarios diante de α.

2° **Resolver o systema** $\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y = m & (2) \end{cases}$

A equação (2) póde escrever-se (nº 46)

$$\cos(x-y) - \cos(x+y) = 2m$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\cos(x-y) = 2m + \cos a$$

Esta equação exige (3)

$$-1 \leq 2m + \cos a \leq +1$$

ou, subtrahindo $\cos a$ de cada membro,

$$-(1+\cos a) \leq 2m \leq 1 - \cos a$$

isto é
$$-\cos^2\frac{a}{2} \leq m \leq \operatorname{sen}^2\frac{a}{2}$$

Se esta condição é preenchida, a equação (3) determina o arco $x-y$ e temos assim de calcular dois arcos, conhecendo a somma e a differença d'elles.

3° **Resolver o systema** $\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \dfrac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y} = \dfrac{p}{q} & (2) \end{cases}$

A equação (2) póde escrever-se

$$\frac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y} = \frac{p-q}{p+q}$$

ou (25)
$$\frac{\operatorname{tg}\dfrac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x+y}{2}} = \frac{p-q}{p+q}$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{p-q}{p+q}\operatorname{tg}\frac{a}{2}$$

Com o auxilio das taboas, esta equação determina sempre um arco $\frac{x-y}{2} = \alpha$.

Ella póde ser substituida pela equação algebrica

$$x - y = 2k\pi + 2\alpha$$

acaba-se, conhecendo a somma e a differença dos arcos que se buscam,

Observação I. — Em cada um dos systemas precedentes, poderiamos eliminar um dos arcos entre as duas equações e calcular assim os dois arcos independentemente um do outro.

Mas sempre que se conhece a somma de dois arcos que entram symetricamente nas equações trigonometricas dadas, ha vantagem em tomar por incognita auxiliar a differença d'esses arcos.

Observação II. — Se dessemos a differença dos dois arcos, procederiamos do mesmo modo, tomando por incognita auxiliar a somma dos arcos procurados.

XIII. **Problema.** — *Achar dois arcos, conhecendo a somma d'elles, assim como a somma, o producto ou o quociente de seus cosenos.*

1° **Seja resolver o systema** $\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \cos x + \cos y = m & (2) \end{cases}$

A equação (2) póde escrever-se (26)

$$2\cos\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = m$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\cos\frac{x-y}{2} = \frac{m}{2\cos\dfrac{a}{2}} \qquad (3)$$

Esta equação exige

$$-1 \leq \frac{m}{2\cos\dfrac{a}{2}} \leq +1$$

isto é
$$m^2 \leq 4\cos^2\frac{a}{2}$$

Se esta condição fôr preenchida, a equação (3) permitte achar por meio das taboas a differença dos arcos x e y, que se determina facilmente depois, conhecendo a somma e a differença d'elles.

2° **Resolver o systema** $\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \cos x \cos y = m & (2) \end{cases}$

A equação (2) póde escrever-se (nº 47)

$$\cos(x-y) + \cos(x+y) = 2m$$

d'onde, pela equação (1)

$$\cos(x-y) = 2m - \cos a \qquad (3)$$

A condição de possibilidade

$$-1 \leq 2m - \cos a \leq +1$$

póde escrever-se
$$-\operatorname{sen}^2\frac{a}{2} \leq m \leq \cos^2\frac{a}{2}$$

Preenchida esta supposta condição, a equação (3) mostra a differença $x-y$, e acaba-se como precedentemente.

3° **Resolver o systema** $\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \dfrac{\cos x}{\cos y} = \dfrac{p}{q} & (2) \end{cases}$

A equação (2) póde escrever-se

$$\frac{\cos x - \cos y}{\cos x + \cos y} = \frac{p-q}{p+q}$$

ou (nº 47)
$$-\operatorname{tg}\left(\frac{x-y}{2}\right)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2} = \frac{p-q}{p+q}$$

d'onde, attendendo-se a (1)

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2} = \frac{q-p}{q+p}\cot\frac{a}{2}$$

Esta equação determina $x-y$, e acaba-se facilmente.

XIV. **Problema.** — *Achar dois arcos, conhecendo a somma d'elles assim como a somma, o producto ou o quociente de suas tangentes.*

1º **Resolver o systema**
$$\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y = m & (2) \end{cases}$$

A equação (2) póde escrever-se (28)

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x\cos y} = m$$

d'onde, tendo em conta (1)

$$\cos x\cos y = \frac{\operatorname{sen} a}{m}$$

assim se é levado a uma das questões precedentes.

2º **Resolver o systema**
$$\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y = m & (2) \end{cases}$$

A equação (2) póde escrever-se

$$\frac{\operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y} = \frac{m}{1}$$

ou
$$\frac{\cos x\cos y - \operatorname{sen}x\operatorname{sen}y}{\cos x\cos y} = \frac{1-m}{1}$$

isto é
$$\frac{\cos(x+y)}{\cos x\cos y} = 1-m$$

d'onde, pela equação (1)

$$\cos x\cos y = \frac{\cos a}{1-m}$$

volta-se ainda ao mesmo systema conhecido.

Observação. — Os dois systemas que precedem podem tambem reduzir-se um ao outro. Igualando entre si as tangentes dos dois membros de (1), obtemos

$$\frac{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}y} = \operatorname{tg}a$$

relação entre as duas quantidades

$$\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tg}x\operatorname{tg}y$$

que permitte obter cada uma d'ellas em funcção da outra.

Nos dois casos, podemos tomar por incognitas $\operatorname{tg}x$ e $\operatorname{tg}y$ e, conhecendo a somma e o producto d'essas incognitas auxiliares, construir a equação do segundo grão que as tem como raizes.

3º **Resolver o systema.**
$$\begin{cases} x+y=a & (1) \\ \dfrac{\operatorname{tg}x}{\operatorname{tg}y} = \dfrac{p}{q} & (2) \end{cases}$$

A equação (2) póde escrever-se

$$\frac{\operatorname{tg}x - \operatorname{tg}y}{\operatorname{tg}x + \operatorname{tg}y} = \frac{p-q}{p+q}$$

ou (nº 48)
$$\frac{\operatorname{sen}(x-y)}{\operatorname{sen}(x+y)} = \frac{p-q}{p+q}$$

d'onde, pela equação (1)

$$\operatorname{sen}(x-y) = \frac{p-q}{p+q}\operatorname{sen}a \qquad (3)$$

se tivermos
$$\left(\frac{p-q}{p+q}\right)^2\operatorname{sen}^2 a \leq 1$$

a equação (3) mostra a differença das incognitas, e só resta resolver um systema d'equações algebricas.

Exercicios

1º *Resolver a equação*

$$\frac{1}{\operatorname{sen}^2 x} + \frac{1}{\cos^2 x} - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 3$$

1º Methodo. Substituamos todas as linhas em funcção de $\operatorname{sen}x$ ou de $\cos x$, por exemplo, em funcção de $\operatorname{sen}x$. Se transpuzermos todos os termos no primeiro membro e os reduzirmos ao mesmo denominador, sem eliminar este, chega-se á equação equivalente

$$\frac{\operatorname{sen}^2 x(2\operatorname{sen}^2 x - 1)}{\operatorname{sen}^2 x(1-\operatorname{sen}^2 x)} = 0$$

que se póde escrever simplesmente

$$2\operatorname{sen}^2 x - 1 = 0$$

D'ella se tira $\operatorname{sen}x = \pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ d'onde $x = \pm 45°$

e por conseguinte, $x = 2k\pi \pm 45°$ e $x = (2k+1)\pi \pm 45°$

2º Methodo. Se substituirmos todas as linhas em funcção de $\operatorname{tg}x$ temos

$$\frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{\operatorname{tg}^2 x} + 1 + \operatorname{tg}^2 x - \frac{1}{\operatorname{tg}^2 x} = 3$$

ou $$\operatorname{tg} x = \pm 1$$

d'onde $$x = k\pi \pm 45^\circ$$

2º Resolver a equação

$$2 \operatorname{sen}^2 x + 4 \operatorname{sen} x \cos x - 4 \cos^2 x = 1$$

Substituamos os senos e cosenos em funcção de $\operatorname{tg} x$. A equação fica sendo :

$$\frac{2 \operatorname{tg}^2 x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} + \frac{4 \operatorname{tg} x}{1 + \operatorname{tg}^2 x} - \frac{4}{1 + \operatorname{tg}^2 x} = 1$$

ou $$\operatorname{tg}^2 x + 4 \operatorname{tg} x - 5 = 0$$

D'ella se tira :

$$\operatorname{tg} x = 1 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi + 45^\circ$$

e $$\operatorname{tg} x = -5 \quad \text{d'onde} \quad x = k\pi - 78^\circ\, 41'\, 24''$$

3º Resolver a equação $$\cos^2 \frac{x - a}{2} + \cos^2 \frac{x + a}{2} = 1$$

Tendo em conta a fórmula

$$1 + \cos \alpha = 2 \cos^2 \frac{\alpha}{2} \quad \text{d'onde} \quad \cos^2 \frac{\alpha}{2} = \frac{1 + \cos \alpha}{2}$$

A equação fica sendo :

$$\cos (x - a) + \cos (x + a) = 0$$

ou (26) $$2 \cos x \cos a = 0$$

D'ella se tira :

$$\cos x = 0 \quad \text{d'onde} \quad x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2} = (2k + 1)\frac{\pi}{2}.$$

4º Resolver a equação $\operatorname{sen} \frac{x}{2} = \cos x$ (Lyão, 1893).

Esta equação póde escrever-se

$$\cos \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right) = \cos x$$

Ella significa que os arcos $\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}$ e x têm e mesmo coseno ; por conseguinte temos (nº 22) $$x = 2k\pi \pm \left(\frac{\pi}{2} - \frac{x}{2}\right)$$

isto é $$x = 2k\pi + \frac{\pi}{2} - \frac{x}{2} = (4k + 1)\frac{\pi}{3}$$

ou $$x = 2k\pi - \frac{\pi}{2} + \frac{x}{2} = (4k - 1)\pi$$

5º Resolver a equação

$$4 \cos^2 x - 2m \cos x - 1 = 0$$

e discutil-a considerando n'ella m *como um parametro variavel. Far-se-hão calculaveis por logarithmos os valores encontrados para* cos x *assentando* :

$$\frac{2}{m} = \operatorname{tg} \varphi$$

Para qualquer valor de m esta equação tem duas raizes *reaes* de *signaes contrarios*; cada uma d'ellas, porém, não é acceitavel senão se achar-se comprehendida entre -1 e $+1$.

A raiz negativa convém se -1 é exterior ás raizes, isto é se houver :

$$f(-1) = 3 + 2m > 0 \quad \text{ou} \quad m > -\frac{3}{2}$$

A raiz positiva convém se $+1$ é exterior ás raizes, isto é se houver :

$$f(+1) = 3 - 2m > 0 \quad \text{ou} \quad m < \frac{3}{2}$$

Por conseguinte ha duas raizes aceitaveis, ou sómente uma, segundo que m é interior ou exterior ao intervallo de $-\frac{3}{2}$ a $+\frac{3}{2}$.

Para tornar logarithmicas as raizes suppostas aceitaveis, escrevem-se debaixo da fórma :

$$\cos x = \frac{m}{4}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{m^2}}\right)$$

Se puzermos $\frac{2}{m} = \operatorname{tg} \varphi$, estas expressões tornam-se :

$$\cos x = \frac{m}{4}\left(1 \pm \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 \varphi}\right) = \frac{m}{4}(1 \pm \sec \varphi) = \frac{m(\cos \varphi \pm 1)}{4 \cos \varphi}$$

ou, separando os dois valores ;

$$\cos x \frac{m \cos^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \varphi} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{-m \operatorname{sen}^2 \frac{\varphi}{2}}{2 \cos \psi}$$

6º Resolver a equação $\operatorname{sen} x + \cos x = \sqrt{2}$

Esta equação é da forma

$$a \operatorname{sen} x + b \cos x = c$$

mas como os coefficientes a e b são iguaes, póde-se fazer seu primeiro membro logarithmico sem introduzir angulo auxiliar.

A equação póde escrever-se :

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} - x\right) = \sqrt{2}$$

ou $$2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{4} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$$

ou $$\cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 1$$

d'ella se tira : $x - \frac{\pi}{4} = 2k\pi$ d'onde $x = (8k + 1)\frac{\pi}{4}$

7° *Resolver a equação* $\cot x - \operatorname{tg} x = 2$

Esta equação é da forma

$$a \operatorname{tg} x + b \cot x = c$$

mas, os dois primeiros coefficientes tendo o mesmo valor absoluto, ha vantagem em abandonar o methodo geral.

A equação póde escrever-se successivamente :

$$\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} - \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} = 2$$

$$\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x \cos x} = 2$$

$$\frac{\cos 2x}{\operatorname{sen} 2x} = 1$$

ou

$$\operatorname{tg} 2x = 1$$

D'ella se tira : $2x = k\pi + 45°$

d'onde $x = (4k + 1)\frac{\pi}{8}$

8° *Resolver a equação*

$$\operatorname{arc\,sen} x = \operatorname{arc\,cos} \sqrt{\frac{3x}{2}}$$

Esta equação exprime que um certo arco tem por seno o numero x e por coseno o numero $\sqrt{\frac{3x}{2}}$. Em virtude da primeira relação fundamental, equivale a dizer que a somma dos quadrados d'esses dois numeros é egual á unidade.

A equação proposta póde pois ser substituida pela equação algebrica

$$x^2 + \frac{3x}{2} = 1$$

que fica satisfeita para $x = -2$ e para $x = \frac{1}{2}$.

Mas, para que uma raiz seja acceitavel, é preciso ter

$$x^2 \leqq 1 \quad \text{e} \quad \frac{3x}{2} \leqq 1$$

isto é

$$-1 \leqq x \leqq \frac{2}{3}$$

O valor $x = \frac{1}{2}$ é pois o unico acceitavel.

9° *Resolver o systema d'equações*

$$\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = 2$$
$$2 \cos x \cos y = 1$$

A primeira equação póde escrever-se (28) :

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y} = 2$$

ou, por causa da segunda, $\operatorname{sen}(x + y) = 1$

D'ella se tira : $x + y = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

e por conseguinte $\cos y = \operatorname{sen} x$

A segunda equação fica sendo :

$$\operatorname{sen} 2x = 1$$

Do que conclue-se : $2x = (4k + 1)\frac{\pi}{2}$

Logo emfim $x = y = (4k + 1)\frac{\pi}{4}$

10° *Resolver o systema*

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$$
$$\cos 2y - \cos 2x = b$$

A segunda equação póde escrever-se (27) :

$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = \frac{b}{2}$$

Dividindo-a membro a membro pela primeira, obtem-se :

$$\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} y = \frac{b}{2a}$$

Conhecendo a somma e a differença dos dois senos, podemos escrever :

$$\operatorname{sen} x = \frac{a}{2} + \frac{b}{4a} \quad \text{e} \quad \cos x = \frac{a}{2} - \frac{b}{4a}$$

Variações de grandeza de algumas funcções trigonometricas.

11° *Variações da funcção*

$$y = a \operatorname{sen} x + b \cos x$$

Se fizermos $\frac{b}{a} = \operatorname{tg} \varphi$ (1)

a funcção póde escrever-se (n° 50, IV) :

$$y = \frac{a}{\cos \varphi} \operatorname{sen}(x + \varphi)$$

A equação (1) determina, entre 0° e 2π, dois valores do angulo φ, tendo suas extremidades diametralmente oppostas: adoptemos aquella cujo coseno é do mesmo signal que a.

Teremos

$$\cos \varphi = \frac{1}{\pm \sqrt{1 + \frac{b^2}{a^2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

e, por conseguinte, $y = +\sqrt{a^2+b^2}\operatorname{sen}(x+\varphi)$

O estudo das variações da funcção y fica assim reduzido ao das variações de uma simples linha trigonometrica. Se fizermos crescer x de 0° a 2π, o arco $x+\varphi$ cresce de φ a $2\pi+\varphi$, e não ha difficuldade em concluir as variações de y. Limitemos-nos a notar que sen $(x+\varphi)$, e por conseguinte a funcção y, passa por um maximo quando x é egual a $\frac{\pi}{2}-\varphi$ e por um minimo quando x é igual a $\frac{3\pi}{2}-\varphi$.

12° *Variações da funcção*

$$y = a \operatorname{tg} x + b \operatorname{cotg} x$$

a e b sendo dois numeros positivos dados e x um arco variavel crescente de 0° a $\frac{\pi}{2}$.

Se o arco pertence ao primeiro quadrante, a funcção

$$y = a \operatorname{tg} x + \frac{b}{\operatorname{tg} x}$$

é a somma de duas variaveis positivas cujo producto é constante. O que se reduz portanto a uma questão conhecida de algebra.

A funcção é minima quando temos

$$a \operatorname{tg} x = \frac{b}{\operatorname{tg} x} \quad \text{d'onde} \quad \operatorname{tg} x = +\sqrt{\frac{b}{a}}$$

O arco x crescendo de 0° a $\frac{\pi}{2}$, a funcção y diminue primeiramente de $+\infty$ até o seu minimo $2\sqrt{ab}$, depois cresce desde esse minimo até $+\infty$.

Observação. — O arco x crescendo de $\frac{\pi}{2}$ a π, a funcção torna a tomar em ordem inversa os mesmos valores mudados de signal.

No 3° quadrante, a funcção varia como no 1°; no 4° quadrante, ella varia como no segundo.

Gerkes de Séllos Rocha
1936 - 1937

SEGUNDA PARTE

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS

CAPITULO V

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS NOS CASOS ELEMENTARES.

Resolver um triangulo, é calcular seus elementos incognitos por meio dos elementos dados.

É este o objecto principal da Trigonometria.

Um triangulo encerra seis elementos principaes, tres lados e tres angulos. Os angulos designam-se ordinariamente pelas letras A, B, C, e os lados oppostos pelas minusculas correspondentes a, b, c. Se o triangulo é rectangulo, A designa o angulo recto e a a hypotenusa.

Um triangulo é *determinado* quando se conhece tres de seus elementos, dos quaes pelo menos um lado. Então póde-se construir esse triangulo, como se aprende em geometria; o que permitte depois medir os elementos incognitos. Este processo, porém, é falto de exactidão, porque as construcções graphicas não offerecem uma precisão sufficiente e por causa tambem da imperfeição dos instrumentos que servem para medir.

Por meio das funcções circulares, substituem-se as operações graphicas por calculos, que dão os valores das incognitas com a maior approximação que é possivel attingir.

§ I. — Triangulos rectangulos.

Relações entre os elementos principaes de um triangulo rectangulo.

62. Theorema I. — *No triangulo rectangulo, cada lado do angulo recto é igual á hypotenusa multiplicada pelo seno do angulo opposto ao lado que se procura ou pelo coseno do angulo adjacente a esse mesmo lado.*

Seja o triangulo rectangulo ABC. Se do ponto B como centro, com BC como raio, descrevermos um arco de circulo, teremos por definição (nº 7):

$$\operatorname{sen} B = \frac{AC}{BC} = \frac{b}{a}; \text{ d'onde } b = a \operatorname{sen} B$$

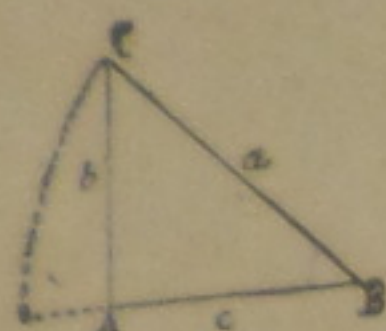
Os angulos B e C sendo complementares, sen $B = \cos C$, logo $b = a \cos C$.

Do mesmo modo : $c = a \operatorname{sen} C$ e $c = a \cos B$

Fig. 45.

Observação. — Este theorema não é mais do que um outro enunciado do theorema das projecções (nº 32); pois, cada lado do angulo recto sendo a projecção da hypotenusa, tem-se immediatamente

$$c = a \cos B \quad e \quad b = a \cos C \qquad (30)$$

d'onde

$$c = a \operatorname{sen} C \quad e \quad b = a \operatorname{sen} B$$

63. **Theorema II.** — *No triangulo rectangulo cada lado do angulo recto é igual ao outro lado multiplicado pela tangente do angulo opposto ao lado que se procura, ou pela cotangente do angulo adjacente d'esse mesmo lado.*

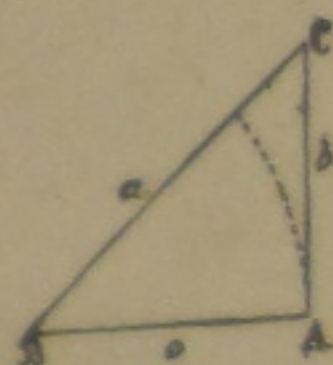



Fig. 46.

Com effeito, se do ponto B como centro, com BA como raio, descrevermos um arco de circulo, teremos por definição (nº 7) :

$$\operatorname{tg} B = \frac{AC}{AB} = \frac{b}{c}, \text{ d'onde } b = c \operatorname{tg} B$$

Os angulos B e C sendo complementares,

$$\operatorname{tg} B = \operatorname{cotg} C \text{; logo } b = c \operatorname{cotg} C$$

Do mesmo modo : $c = b \operatorname{tg} C$ e $c = b \operatorname{cotg} B$ (31)

Observações. I. — Este theorema póde ser deduzido do precedente; pois as duas relações $b = a \operatorname{sen} B$ e $c = a \cos B$, dão, dividindo-as membro a membro, $\frac{b}{c} = \frac{\operatorname{sen} B}{\cos B} = \operatorname{tg} B$.

II. — Bastam os dois theoremas precedentes para resolver um triangulo rectangulo. Junta-se-lhes a relação dada pela geometria : $a^2 = b^2 + c^2$, que em todo caso póde-se obter fazendo a somma dos quadrados das duas relações .

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{a} \quad e \quad \cos B = \frac{c}{a}$$

Resolução dos triangulos rectangulos.

64. A resolução dos triangulos rectangulos póde apresentar quatro casos, segundo se tenha :

1º A hypothenusa com um angulo agudo;
2º Um dos lados do angulo recto com um angulo agudo;
3º A hypothenusa com um lado do angulo recto;
4º Os dois lados do angulo recto.

65. **1º Caso.** — *Dá-se a hypothenusa* a *e o angulo agudo* B *; procura-se o angulo* C *e os dois lados* b *e* c.

O angulo C é o complemento do angulo B, logo

$$C = 90° - B$$

O 1º theorema (nº 62) dá para os lados do angulo recto :

$$b = a \operatorname{sen} B \quad e \quad c = a \cos B$$

A *superficie* é $S = \frac{1}{2} bc$; ou substituindo os valores de b e de c :

$$S = \frac{1}{2} a^2 \operatorname{sen} B \cos B = \frac{1}{4} a^2 \operatorname{sen} 2B$$

66. **2º Caso.** — *Dá-se um dos lados do angulo recto* b *com um dos angulos agudos,* B, *por exemplo ; calcular o outro angulo agudo* C, *a hypothenusa* a *e o outro lado* c.

O angulo C é o complemento do angulo B, logo

$$C = 90° - B$$

O 1º theorema dá $b = a \operatorname{sen} B$, logo

$$a = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

O 2º theorema dá $c = b \operatorname{cotg} B$.

A *superficie* é $S = \frac{1}{2} bc$, ou substituindo o valor de c

$$S = \frac{1}{2} b^2 \operatorname{cotg} B$$

67. **3º Caso.** — *Dá-se a hypothenusa* a *com um lado* b *do angulo recto; calcular os angulos* B *e* C *e o lado* c.

Sabemos que $\operatorname{sen} B = \cos C = \frac{b}{a}$

O lado c é dado pela fórmula $c = \sqrt{a^2 - b^2}$. Para que esta fórmula seja calculavel por logarithmos, basta substituir debaixo do radical $a^2 - b^2$ por $(a+b)(a-b)$, e temos $c = \sqrt{(a+b)(a-b)}$.

Observação. — Na fórmula $\operatorname{sen} B = \cos C = \frac{b}{a}$, o calculo logarithmico dá uma approximação insufficiente quando b differe pouco de a, visto que a relação $\frac{b}{a}$ estando muito perto de 1, o angulo B pouco differe de 90º, e o angulo C de 0º; esses angulos estão mal determinados (nº 60). É preferivel empregar a fórmula :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \cos C}{1 + \cos C}} \text{ (nº 39, fórm. 19)}$$

E como temos $\cos C = \frac{b}{a}$, resulta :

$$\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \sqrt{\frac{1 - \frac{b}{a}}{1 + \frac{b}{a}}} = \sqrt{\frac{a - b}{a + b}}$$

Esta fórmula offerece outra vantagem, a de só precisar-se da procura dos logarithmos de $a+b$ e de $a-b$, os mesmos que servem para calcular c.

A *superficie* é $S=\frac{1}{2}bc=\frac{b}{2}\sqrt{(a+b)(a-b)}$

68. 4º Caso. —*Dão-se os dois lados do angulo recto* **b e c**; *calcular os angulos* B *e* C *e a hypothenusa* a.

Os angulos agudos são dados pela fórmula (nº 63) :

$$\operatorname{tg} B=\operatorname{cotg} C=\frac{b}{c}$$

Poder-se-hia em seguida calcular a hypothenusa por meio da relação $a^2=b^2+c^2$; mas é preferivel empregar a fórmula *logarithmica* $a=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$; porque o angulo B sendo conhecido por sua tangente, póde-se ter facilmente sen B.

Poder-se-hia entretanto fazer logarithmica a fórmula $a^2=b^2+c^2$ pelo processo indicado no nº 50; chegariamos á formula $a=\frac{b}{\cos\varphi}$. Mas o angulo φ é justamente o angulo B, de modo que este segundo meio leva ao mesmo calculo que o primeiro.

A superficie é $S=\frac{1}{2}bc$.

Exemplos numericos para indicar a disposição dos calculos.

Nos exemplos seguintes, dois casos referem-se ao mesmo triangulo e servem de verificação. O calculo é feito com taboas de 5 decimaes.

1º Caso.

Dados $\begin{cases} A=90^\circ \\ a=1\,254^m \\ B=42^\circ\,48' \end{cases}$

$$C=90^\circ-B=90^\circ-42^\circ\,48'=47^\circ\,12'$$

Fórmulas $\begin{cases} b=a\operatorname{sen} B & \operatorname{Log} b=\log a+\log\operatorname{sen} B \\ c=a\cos B & \operatorname{Log} c=\log a+\log\cos B \end{cases}$

$\log a=3{,}098\,30$	$\log a=3{,}098\,30$
$\log\operatorname{sen} B=\bar{1}{,}832\,15$	$\log\cos B=\bar{1}{,}865\,54$
$2{,}930\,45$	$2{,}963\,84$
$b=852^m{,}02$	$c=920^m{,}08$

2º Caso.

Dados $\begin{cases} A=90^\circ \\ b=852^m{,}02 \\ B=42^\circ\,48' \end{cases}$

$$C=90^\circ-B=90^\circ-42^\circ\,48'=47^\circ\,12'$$

Fórmulas $\begin{cases} a=\frac{b}{\operatorname{sen} B} & \operatorname{Log} a=\log b-\log\operatorname{sen} B \\ c=b\cot B & \operatorname{Log} c=\log b+\log\cot B \end{cases}$

$\log b=2{,}930\,45$	$\log b=2{,}930\,45$
$\log\operatorname{sen} B=\bar{1}{,}832\,15$	$\log\cot B=0{,}033\,38$
$3{,}098\,30$	$2{,}963\,83$
$a=1\,254^m$	$c=920^m{,}08$

3º Caso.

Dados $\begin{cases} A=90^\circ \\ a=397^m{,}70 \\ b=388^m \end{cases}$

Fórmulas $\begin{cases} c=\sqrt{(a+b)(a-b)}. & \operatorname{Log} c=\frac{1}{2}\left[\log(a+b)+\log(a-b)\right] \\ \operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{a-b}{a+b}}. & \operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}\left[\log(a-b)-\log(a+b)\right] \end{cases}$

Calculos auxiliares $\begin{cases} a+b=785^m{,}7 \\ a-b=\ \ 9^m{,}7 \end{cases}$

$\log(a+b)=2{,}895\,26$	$\log(a-b)=0{,}986\,77$
$\log(a-b)=0{,}986\,77$	$-\log(a+b)=2{,}895\,26$
$3{,}882\,03$	$\bar{2}{,}091\,51$
$\log c=1{,}941\,01$	$\log\operatorname{tg}\frac{1}{2}C=\bar{1}{,}045\,75$
$c=\ 87^m{,}30$	$\frac{1}{2}C=6^\circ\,20'\,25''$
	$C=12^\circ\,40'\,50''$, $B=77^\circ\,19'\,10''$

4º Caso.

Dados $\begin{cases} A=90^\circ \\ b=388^m \\ c=87^m{,}30 \end{cases}$

Fórmulas $\begin{cases} \operatorname{tg} B=\frac{b}{c}. & \operatorname{Log}\operatorname{tg} B=\log b-\log c. \\ a=\frac{b}{\operatorname{sen} B}. & \operatorname{Log} a=\log b-\log\operatorname{sen} B. \end{cases}$

$\log b=2{,}588\,83$	$\log b=2{,}588\,83$
$-\log c=1{,}944\,02$	$-\log\operatorname{sen} B=\bar{1}{,}989\,27$
$0{,}647\,81$	$2{,}599\,56$
$B=77^\circ\,19'\,10''$. $C=12^\circ\,40'\,50''$	$a=397^m{,}70$

§ II. — Triangulos quaesquer.

Relações entre os elementos principaes de um triangulo qualquer.

69. Theorema I. — *N'um triangulo, os lados são proporcionaes aos senos dos angulos oppostos.*

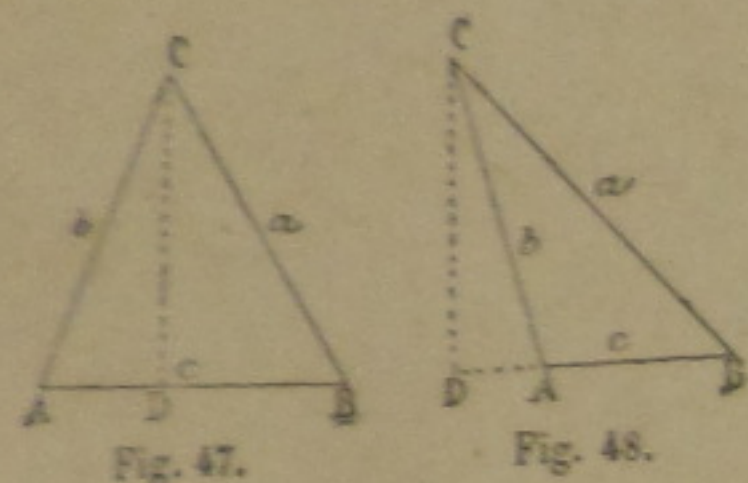
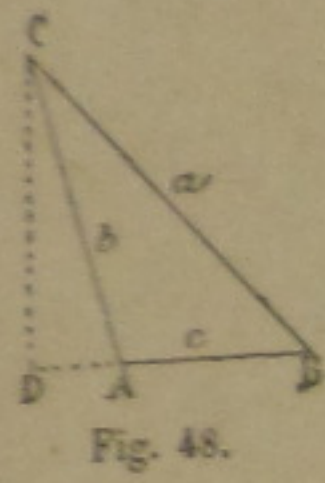



Fig. 47. Fig. 48.

Seja o triangulo ABC. Abaixemos do vertice C uma perpendicular sobre o lado opposto; essa perpendicular póde cahir em AB (fig. 47) ou em um de seus prolongamentos (fig. 48). No 1º caso, os triangulos rectangulos CAD e CBD dão:

$$CD = b \operatorname{sen} A \quad \text{e} \quad CD = a \operatorname{sen} B$$

do que se deduz:

$$b \operatorname{sen} A = a \operatorname{sen} B; \quad \text{d'onde} \quad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

No 2º caso, nota-se que os angulos *supplementares* em A têm o mesmo seno (nº 12),

logo
$$CD = b \operatorname{sen} A \quad \text{e} \quad CD = a \operatorname{sen} B$$

portanto
$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Dois lados *quaesquer* sendo proporcionaes aos senos dos angulos oppostos, temos:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \qquad (32)$$

70. Theorema II. *N'um triangulo, o quadrado de um lado é igual á somma dos quadrados dos outros dois lados, menos duas vezes o producto d'esses lados multiplicado pelo coseno do angulo que elles comprehendem.*

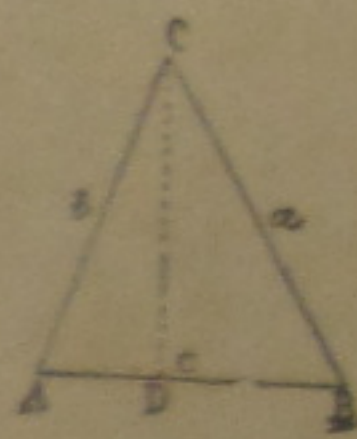
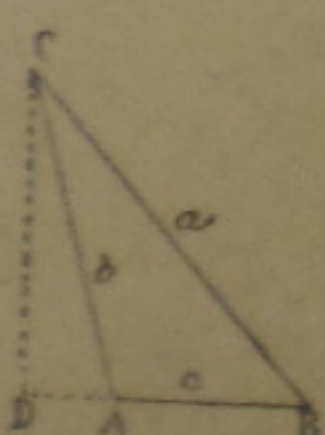



Fig. 49. Fig. 50.

Seja CD a perpendicular abaixada do vertice C sobre AB.

1º Se o angulo A é agudo (fig. 49), temos (*Geometria*, nº 251):

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2c \times AD$$

Ora
$$AD = b \cos A, \text{ logo}$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

2º Se o angulo A é obtuso (fig. 50), temos:

$$a^2 = b^2 + c^2 + 2c \times AD$$

ora $AD = b \cos DAC$; além d'isso, os angulos em A sendo supplementares, $\cos DAC = -\cos A$; logo $AD = -b \cos A$, e por conseguinte

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \qquad (33)$$

Este theorema dá as tres relações seguintes entre os seis elementos de um triangulo:

$$\left.\begin{aligned} a^2 &= b^2 + c^2 - 2bc \cos A \\ b^2 &= a^2 + c^2 - 2ac \cos B \\ c^2 &= a^2 + b^2 - 2ab \cos C \end{aligned}\right\} \qquad (X)$$

71. Theorema III. *Cada lado de um triangulo é igual á somma algebrica das projecções dos outros dois sobre a direcção do primeiro.*

O theorema das projecções dá (nº XII):

$$\text{proj. } BC = \text{proj. } BA + \text{proj. } AC$$

isto é, tomando a recta BC como eixo de projecção

$$a = b \cos C + c \cos B \qquad (34)$$

Do mesmo modo:
e

$$\left.\begin{aligned} a &= b \cos C + c \cos B \\ b &= a \cos C + c \cos A \\ c &= a \cos B + b \cos A \end{aligned}\right\} \qquad (Y)$$

Observação I. Juntando á relação dos senos (32) a relação que existe entre os tres angulos de um triangulo, temos

$$\left.\begin{aligned} \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} \\ A + B + C = 180° \end{aligned}\right\} \qquad (Z)$$

Observação II. *Entre os seis elementos de um triangulo, não póde existir mais de tres relações distinctas.*

Com effeito, se houvessem quatro relações distinctas entre os seis elementos, bastaria conhecer dois elementos para poder deduzir d'elles todos os outros; mas isso não póde ser; porque, para determinar geometricamente um triangulo, sabemos que são precisos tres elementos. Os systemas (X), (Y), (Z) são compostos cada um de tres relações distinctas; mas, em virtude da observação precedente, se os numeros a, b, c, A, B, C, medem os seis elementos de um triangulo, esses tres systemas de relações entram forçosamente um no outro.

É o que vamos verificar directamente.

72. Equivalencia dos tres systemas. *Se* a, b, c, *designam tres numeros positivos differentes de zero e* A, B, C *tres angulos comprehendidos entre* 0° *e* 180°, *os systemas* (X), (Y), (Z) *são equivalentes.*

Vamos demonstrar a equivalencia do systema (Y) com cada um dos outros dois, d'onde ha de resultar a equivalencia d'estes ultimos entre si.

I. *Os systemas* (X) *e* (Y) *são equivalentes.*

1º *O systema* (X) *tem por consequencia o systema* (Y). Sendo dado o systema (X), d'elle póde-se deduzir cada uma das relações do systema (Y)

a terceira, por exemplo. Com effeito, addicionando as duas primeiras relações dadas, vem

$$a^2 + b^2 = a^2 + b^2 + 2c^2 - 2c\,(b \cos A + a \cos B)$$

d'onde

$$2c^2 = 2c\,(b \cos A + a \cos B)$$

e dividindo tudo por $2c$, que se suppõe differente de zero

$$c = a \cos B + b \cos A$$

2° *O systema* (**Y**) *tem por consequencia o systema* (**X**). Sendo dado o systema (**Y**), d'elle póde-se deduzir cada uma das relações do systema (**X**), a primeira, por exemplo. Com effeito, multipliquemos respectivamente as relações dadas por a, b, c; em seguida, da primeira, diminuamos membro a membro a somma das outras duas; obtemos

$$a^2 - b^2 - c^2 = -\,2bc \cos A$$

isto é

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

II. *Os systemas* (**Z**) *e* (**Y**) *são equivalentes.*

1° *O systema* (**Z**) *tem por consequencia o systema* (**Y**). Sendo dado o systema (**Z**), d'elle póde-se deduzir cada uma das relações do systema (**Y**) a primeira, por exemplo. Para esse fim basta eliminar A entre as relações do systema (**Z**). Com effeito, a terceira póde escrever-se $A = 180° - (B + C)$

Do que se conclue

$$\text{sen}\, A = \text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B$$

Esta relação sendo homogenea em relação aos tres senos, n'ella póde-se substituir estes pelos numeros a, b, c que lhes são proporcionaes em virtude das duas primeiras igualdades do systema (**Z**).

Resulta

$$a = b \cos C + c \cos B$$

2° *O systema* (**Y**) *tem por consequencia o systema* (**Z**). Sendo dado o systema (**Y**), d'elle póde-se desduzir o systema (**Z**).

Para obter a primeira relação dos senos, basta eliminar C entre as duas primeiras relações (**Y**). Reduzindo cos C ao mesmo coefficiente, depois subtraíndo membro a membro, resulta

$$a^2 - b^2 = c\,(a \cos B - b \cos A)$$

ou, levando em conta a terceira relação dada,

$$a^2 - b^2 = (a \cos B + b \cos A)\,(a \cos B - b \cos A) = a^2 \cos^2 B - b^2 \cos^2 A$$

d'onde

$$a^2 \,\text{sen}^2 B = b^2 \,\text{sen}^2 A$$

ou simplesmente, visto que a, b, sen A, sen B são positivos por hypothese

$$a \,\text{sen}\, B = b \,\text{sen}\, A$$

Logo, e do mesmo modo

$$\frac{a}{\text{sen}\, A} = \frac{b}{\text{sen}\, B} = \frac{c}{\text{sen}\, C}$$

A primeira das relações (**Y**) sendo homogenea em relação aos tres numeros a, b, c, essas proporções permittem escrevel-a

$$\text{sen}\, A = \text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B$$

ou

$$\text{sen}\, A = \text{sen}\,(B + C)$$

Os angulos A e B + C tendo o mesmo seno, têm por differença (n° 20)

$$A - B - C = 2k\pi$$

ou por somma

$$A + B + C = (2k + 1)\,\pi$$

Porém cada um dos angulos A, B, C achando-se comprehendido entre 0° e 180°, deve-se fazer $k = 0$; o que dá

$$A - B - C = 0°$$

ou

$$A + B + C = 180°$$

A primeira hypothese não é admissivel, porque A designa um qualquer dos angulos do triangulo.

Logo as relações (**Y**) têm como consequencia as tres relações do systema (**Z**).

Observação. Cada qual dos systemas equivalentes (**X**), (**Y**), (**Z**), é sufficiente para resolver qualquer triangulo; mas não apresentam a mesma vantagem. Assim é que as fórmulas (**X**) e as fórmulas (**Y**) não são logarithmicas; cada uma das equações do systema (**Y**) contém cinco elementos do triangulo, o que dá logar a eliminações mais complicadas, etc.

Em geral, é pois o systema (**Z**) que deve ser preferido.

73. Theorema reciproco. *Se tres comprimentos positivos* a, b, c, *e tres angulos* A, B, C *comprehendidos entre* 0° *e* 180° *verificam um ou outro dos tres systemas* (**X**), (**Y**), (**Z**), *existe um triangulo tendo por lados* a, b, c *e por angulos oppostos* A, B, C.

Os tres systemas sendo equivalentes, desde que as seis grandezas consideradas satisfazem ao systema (**Z**) ou ao systema (**Y**), ellas satisfazem ao systema (**X**). Basta estabelecer, n'esta ultima hypothese, as duas proposições seguintes :

1° *Existe um triangulo que tem por lados* a, b, c.

Com effeito, cos A sendo superior a -1, temos :

$$b^2 + c^2 - 2bc \cos A < b^2 + c^2 + 2bc$$

isto é

$$a^2 < (b + c)^2$$

ou

$$a^2 - (b + c)^2 < 0$$

ou

$$(a + b + c)\,(a - b - c) < 0$$

e, supprimindo o factor positivo $a + b + c$

$$a - b - c < 0$$

do que resulta

$$a < b + c$$

Acha se-tambem :

$$b < c + a$$

$$c < a + b$$

Como cada um d'esses comprimentos é menor do que a somma dos outros dois, póde-se construir um triangulo tendo por lados a, b, c.

2° *Os angulos* A', B', C' *do triangulo que tem por lados* a, b, c, *têm respectivamente por valor* A, B, C.

Com effeito, segundo o theorema II, temos :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A'$$

Mas, por hypothese,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

Assim,

$$\cos A' = \cos A$$

Ora, cada um dos angulos A e A' está comprehendido entre 0° e 180°, e, n'esse intervallo, só existe um unico angulo tendo um coseno dado; logo

$$A' = A$$

Do mesmo modo $B' = B$ e $C' = C$

Logo existe um triangulo que tem por elementos as seis grandezas consideradas.

Observação. Se os dados de um triangulo estão representados por letras, devemos sempre suppôr que os lados dados são positivos e que os angulos dados estão comprehendidos entre 0° e 180°.

Mas, depois de haver calculado as incognitas em funcção d'esses dados, por meio das equações fornecidas por um dos systemas (**X**), (**Y**), ou (**Z**), resta discutir as fórmulas de resolução assim achadas, isto é, procurar as condições que os dados devem preencher para que o triangulo exista.

Para esse fim, em virtude do theorema reciproco que precede, basta procurar as condições precisas para que os valores dos lados incognitos sejam positivos, e os valores dos angulos incognitos estejam comprehendidos entre 0° e 180°; visto que desde que tres comprimentos a, b, c e tres angulos A, B, C verificam um dos systemas e satisfazem a essas condições, póde-se affirmar que são os seis elementos de um triangulo.

Resolução de triangulos quaesquer.

A resolução de triangulos quaesquer apresenta quatro casos elementares, segundo são dados :

1° Um lado e dois angulos,
2° Dois lados e o angulo comprehendido,
3° Os tres lados,
4° Dois lados e o angulo opposto a um d'elles.

74. 1° Caso. *Conhecendo um lado* a *e os angulos* B *e* C, *calcular o angulo* A *e os lados* b *e* c.

As tres incognitas são dadas pelas tres equações

$$A + B + C = 180°$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

d'onde se tira immediatamente

$$A = 180° - (B + C)$$

$$b = \frac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A} \quad \text{e} \quad c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

A primeira fórmula exige que se tenha $B + C < 180°$.

Se esta condição está preenchida, o problema admitte uma unica solução.

Superficie. A superficie do triangulo é egual á metade do producto da base a pela altura AD (fig. 51).

Temos

$$S = \frac{a}{2} \times AD$$

Mas o triangulo rectangulo ABD dá $AD = c \operatorname{sen} B$; d'onde, substituindo c pelo valor que acabamos de estabelecer

$$AD = \frac{a \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

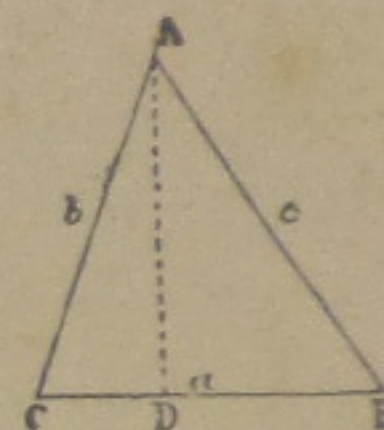



Fig. 15.

A superficie tem pois por expressão

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$$

ou, notando que $\operatorname{sen} A = \operatorname{sen} (B + C)$, (n° 12)

$$S = \frac{1}{2} a^2 \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} (B + C)} \qquad (35)$$

75. 2° Caso. *Conhecendo dois lados* a *e* b *e o angulo comprehendido* C, *calcular os angulos* A *e* B *e o lado* c.

As incognitas são determinadas pelas tres equações

$$A + B + C = 180°$$

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}$$

Calculam-se primeiro os angulos A e B, conhecendo a somma d'elles

$$A + B = 180° - C$$

e a relação de seus senos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b}$$

Para esse fim, procura-se a differença (A − B) (pagina 91).

A segunda equação póde escrever-se

$$\frac{\operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{a - b}{a + b}$$

ou (25)

$$\frac{\operatorname{tg} \frac{A - B}{2}}{\operatorname{tg} \frac{A + B}{2}} = \frac{a - b}{a + b}$$

d'onde, levando em conta a primeira equação e notando que temos

$$\operatorname{tg} \frac{A + B}{2} = \operatorname{tg} \left(90° - \frac{C}{2}\right) = \operatorname{cotg} \frac{C}{2}$$

$$\operatorname{tg} \frac{A - B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{tg} \frac{A + B}{2} = \frac{a - b}{a + b} \operatorname{cotg} \frac{C}{2} \qquad (36)$$

Conhecendo $\frac{A+B}{2}$ e $\frac{A-B}{2}$, deduz-se A e B por uma addição e uma substracção.

Emfim, conhecidos os angulos, obtem-se o lado c pela relação dos senos :

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \qquad (\alpha)$$

Podemos sempre suppôr que a designa o maior dos lados dados ($a \geq b$); então a fórmula (36) dá para $\frac{A-B}{2}$ só um valor mais pequeno que 90°. A fórmula (α) dá para c um valor positivo. Logo o problema admitte sempre uma solução, e sómente uma.

76. Superficie. Theorema. A superficie de um triangulo é igual á metade do producto de dois lados pelo seno do angulo que elles comprehendem.

Com effeito, sejam S a superficie e AD a altura a contar do vertice A (fig. 52).

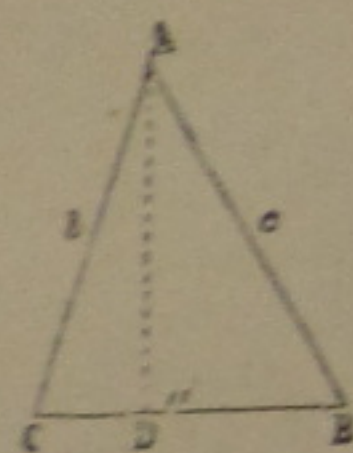



Fig. 52.

Temos $$S = \frac{a}{2} \times AD$$

Ora o triangulo rectangulo ADC dá

$$AD = b \operatorname{sen} C$$

Logo $$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C \qquad (37)$$

77. Observação. A fórmula (α) requer a procura de outros tres logarithmos, dois dos quaes tambem servem para a fórmula (37); mas se não se quizer calcular a superficie, poupa-se a procura de um logarithmo utilisando para o calculo de c uma outra fórmula que vamos estabelecer.

A relação dos senos permitte escrever-se :

$$\frac{c}{a+b} = \frac{\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B} = \frac{2 \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cos \frac{C}{2}}{2 \operatorname{sen} \frac{A+B}{2} \cos \frac{A-B}{2}}$$

donde, supprimindo os factores iguaes $\cos \frac{C}{2}$ e $\operatorname{sen} \frac{A+B}{2}$:

$$c = (a+b) \frac{\operatorname{sen} \frac{C}{2}}{\cos \frac{A-B}{2}} \qquad (38)$$

78. Calculo directo do lado c. Emfim póde-se calcular directamente o lado c sem conhecer os angulos A e B; recorre-se então á fórmula

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$$

que basta tornar logarithmica. Para esse fim multiplica-se $a^2 + b^2$ por $\cos^2 \frac{1}{2} C + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C = 1$, e substitue-se $\cos C$ por

$$\cos^2 \frac{1}{2} C - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C$$

o que permitte escrever-se :

$$c^2 = (a^2+b^2)\left(\cos^2 \frac{1}{2} C + \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C\right) - 2ab\left(\cos^2 \frac{1}{2} C - \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C\right)$$

ou $$c^2 = (a-b)^2 \cos^2 \frac{1}{2} C + (a+b)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C$$

ou emfim $$c^2 = (a+b)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C \left[1 + \frac{(a-b)^2}{(a+b)^2} \operatorname{cotg}^2 \frac{1}{2} C\right]$$

Pondo $\operatorname{tg} \varphi = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{cotg} \frac{1}{2} C$, temos :

$$c^2 = (a+b)^2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C (1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)$$

ou $$c^2 = (a+b)^2 \frac{\operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} C}{\cos^2 \varphi}$$

ou emfim $$c = (a+b) \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \varphi}$$

Mas é preciso notar que o valor de $\operatorname{tg} \varphi$ é justamente o de $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B)$ calculado pelo primeiro methodo; logo este segundo processo conduz aos mesmos calculos que o primeiro, e ha vantagem em começar por calcular os angulos, mesmo quando não se precisa senão do lado c.

79. 3° Caso. *Conhecendo os tres lados* a, b, c, *calcular os tres angulos* A, B, C.

Cada um dos angulos é determinado por uma das equações (X) (n° 70). Por exemplo :

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$

dá $$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$$

Mas esta fórmula não é calculavel por logarithmos; transforma-se por meio das relações (n° 39) :

$$2 \cos^2 \frac{A}{2} = 1 + \cos A$$

ou $$2 \operatorname{sen}^2 \frac{A}{2} = 1 - \cos A$$

as quaes substitue-se cos A pelo valor precedente. A primeira dá :

$$2\cos^2\frac{1}{2}A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{b^2+2bc+c^2-a^2}{2bc}$$

ou $$2\cos^2\frac{1}{2}A = \frac{(b+c)^2-a^2}{2bc} = \frac{(b+c+a)(b+c-a)}{2bc}$$

d'onde $$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc}}$$

Designemos por $2p$ o perimetro do triangulo, teremos :

$$a+b+c=2p,$$
$$b+c-a=2(p-a)$$
$$a+c-b=2(p-b)$$
$$a+b-c=2(p-c)$$

e por conseguinte : $$\cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

Temos tambem : $$\cos\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}} \qquad (39)$$

$$\cos\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}$$

A segunda relação dá semelhantemente :

$$2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} = \frac{a^2-b^2-c^2+2bc}{2bc}$$

ou $$2\,\text{sen}^2\frac{1}{2}A = \frac{a^2-(b-c)^2}{2bc} = \frac{(a+b-c)(a+c-b)}{2bc}$$

d'onde $$\text{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}$$

ou

$$\text{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

Do mesmo modo achar-se-hia : $$\text{sen}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}} \qquad (40)$$

$$\text{sen}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}$$

Dividindo as fórmulas (40) pelas fórmulas (39), obtem-se :

$$\text{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

$$\text{tg}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad (41)$$

$$\text{tg}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

Em todas estas fórmulas as radicaes devem ser tomadas positiva-

mente, porque a metade de um angulo de um triangulo é sempre menor que 90°, e no primeiro quadrante todas as linhas trigonometricas são positivas. Se ha um só angulo a determinar, podemo-nos servir indistinctamente das fórmulas (39), (40) ou (41); mas se tivermos de calcular os tres angulos, é melhor empregar as fórmulas (41), que só requerem quatro logarithmos em logar de seis ou sete e que dão resultados mais exactos (nº 60, *Observ. I*).

80. Superficie. A superficie de um triangulo estando expressa por $\frac{1}{2}bc\,\text{sen}\,A$, substitua-se sen A par $2\,\text{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$, teremos :

$$S = bc\,\text{sen}\frac{1}{2}A\cos\frac{1}{2}A$$

Ora vimos (nº 79) que :

$$\text{sen}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}} \quad \text{e} \quad \cos\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

por conseguinte :

$$S = bc\sqrt{\frac{p(p-a)(p-b)(p-c)}{(bc)^2}} = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (42)$$

81. Discussão. Procuremos as condições de possibilidade, isto é as relações que devem existir entre os dados a, b, c, para que d'ellas possamos deduzir os angulos A, B, C.

Esta discussão póde recahir indifferentemente em um ou outro dos tres grupos de fórmulas que precedem.

Fórmulas (1). Para que exista um angulo $\frac{A}{2}$, comprehendido entre 0° e 90°, satisfazendo á formula

$$\cos\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}$$

é necessario e sufficiente que se tenha

$$0 < \frac{p(p-a)}{bc} < 1$$

A primeira desigualdade póde escrever-se successivamente

$$p(p-a) > 0$$

ou $$p-a > 0$$

isto é $$b+c-a > 0$$

e emfim $$a < b+c$$

A segunda desigualdade póde escrever-se successivamente

$$\frac{(b+c+a)(b+c-a)}{4bc} < 1$$

$$(b+c)^2-a^2 < 4bc$$

ou $$(b-c)^2-a^2 < 0$$

isto é $$(b-c+a)(b-c-a) < 0$$

O primeiro membro é uma funcção do segundo gráo em b; para que ella seja negativa, isto é, de signal contrario ao coefficiente de b^2, é preciso e sufficiente que b seja inferior ás raizes

$$c-a<b<c+a$$

o que exige ao mesmo tempo

$$c<a+b \quad \text{e} \quad b<a+c$$

Em resumo, é preciso e sufficiente que cada lado seja inferior á somma dos outros dois. O que é conforme com os dados da geometria.

Cada uma das outras fórmulas (1) conduziria evidentemente a esta mesma conclusão.

Fórmulas (2). Para que exista um angulo $\frac{A}{2}$ dado pela fórmula

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}$$

é preciso e sufficiente que tenhamos

$$0<\frac{(p-b)(p-c)}{bc}<1$$

A primeira desigualdade se reduz a

$$(p-b)(p-c)>0$$

ou, multiplicando cada factor por 2

$$(a+c-b)(a+b-c)>0$$

esta condição exige que os dois factores sejam de mesmo signal: do signal da sua somma $2a$, isto é positivos. É preciso pois que tenhamos ao mesmo tempo

$$a+c-b>0 \quad \text{d'onde} \quad b<a+c$$

e

$$a+b-c>0 \quad \text{d'onde} \quad c<a+b$$

A segunda desigualdade póde escrever-se successivamente

$$(p-b)(p-c)<bc$$
$$p^2-p(b+c)<0$$
$$p-b-c<0$$

d'onde, multiplicando os dois membros por 2

$$a<b+c$$

Fórmulas (3). Para que a fórmula

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

determine um angulo $\frac{A}{2}$, é preciso e sufficiente que tenhamos

$$\frac{(p-b)\,p-c)}{p(p-a)}>0$$

ou, multiplicando os dois membros pelo quadrado do denominador e supprimindo o factor positivo p

$$(p-a)(p-b)(p-c)>0$$

Esta condição exige que o numero dos factores negativos seja zero ou dois.

Mas esta ultima hypothese é inadmissivel: dois d'esses factores não podem ser negativos ao mesmo tempo, desde que a somma de dois quaesquer d'esses factores é igual a um dos lados a, b, c. Logo é preciso que tenhamos ao mesmo tempo

$$p-a>0 \quad \text{d'onde} \quad a<b+c$$
$$p-b>0 \qquad\qquad b<a+c$$
$$p-c>0 \qquad\qquad c<a+b$$

82. Simplificação das fórmulas (3) pela introducção do raio r do circulo inscripto. Sabemos que a superficie de um triangulo é igual ao producto do semi-perimetro pelo raio do circulo inscripto (*Geometria.*)

Temos

$$S=pr$$

Por outro lado, $S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

Por conseguinte, $r=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p}}$

As fórmulas (3) podem pois escrever-se:

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}=\frac{1}{p-a}\sqrt{\frac{(p-a)\,p-b)(p-c)}{p}}$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\frac{r}{p-a}$$

Do mesmo modo

$$\operatorname{tg}\frac{B}{2}=\frac{r}{p-b}$$

e

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{r}{p-b}$$

Estas ultimas fórmulas são de uso muito commodo para os calculos logarithmicos; porque, depois de ter achado log r, ter-se-ha o logarithmo de cada uma das tangentes pela addição de dois logarithmos sómente.

83. 4° Caso. *Conhecendo os lados* a, b, *e o angulo* A *opposto a um d'elles, calcular os angulos* B, C *e o lado* c.

As equações

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$
$$A+B+C=180^\circ$$

dão successivamente

$$\operatorname{sen}B=\frac{b\operatorname{sen}A}{a} \qquad (1)$$

depois

$$C=180^\circ-(A+B) \qquad (2)$$

e emfim
$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \qquad (3)$$

Quanto á superficie, póde obter-se como no segundo caso pela fórmula
$$S = \frac{1}{2} ab \operatorname{sen} C$$

84. Discussão. A fórmula (1), cujo segundo membro é positivo exige
$$\frac{b \operatorname{sen} A}{a} < 1$$
ou
$$a \geqq b \operatorname{sen} A$$

Se $a < b$ *sen* A, o problema não tem solução.
Se $a = b$ *sen* A, as fórmulas (1), (2), (3) dão successivamente
$$B = 90^\circ, \quad C = 90^\circ - A \quad \text{e} \quad c = b \cos A$$

Esta solução só é acceitavel se o angulo A é agudo. N'esta hypothese, existe sómente um triangulo que responde á questão. Este triangulo é rectangulo em B.

Se $a > b$ *sen* A, a fórmula (1) dá para o angulo B dois valores supplementares comprehendidos entre 0° e 180°: um angulo agudo B′ e um angulo obtuso B″.

Mas estes angulos só são acceitaveis se os valores correspondentes do angulo C e do lado c são ambos positivos.

Ora, se substituirmos B pelo valor B′, depois pelo valor B″, as fórmulas (2) e (3) dão successivamente :
$$C' = 180^\circ - (A + B') \quad \text{e} \quad c' = \frac{a \operatorname{sen} C'}{\operatorname{sen} A}$$
depois
$$C'' = 180^\circ - (A + B'') \quad \text{e} \quad c'' = \frac{a \operatorname{sen} C''}{\operatorname{sen} A}$$

Para que a primeira solução convenha, basta que tenhamos $A + B' < 180^\circ$, porque esta condição tem por consequencia
$$\operatorname{sen} C' > 0 \quad \text{e} \quad c' > 0$$

Assim tambem a segunda solução convém se tivermos
$$A + B'' < 180^\circ$$

Isto posto, distinguiremos dois casos :

1° Caso. $A < 90$. Então o angulo obtuso B′ sempre convém, porque temos evidentemente
$$A + B' < 180^\circ$$

O angulo obtuso B″ só convém quando se tem
$$A + B'' < 180^\circ \quad \text{ou} \quad A < 180^\circ - B''$$
isto é, os angulos A e 180° — B″ sendo agudos,
$$\operatorname{sen} A < \operatorname{sen} (180 - B'')$$
ou
$$\operatorname{sen} A < \operatorname{sen} B''$$
ou tambem
$$\operatorname{sen} A < \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$
ou emfim
$$a < b$$

Assim, quando o angulo A é *agudo*, o problema tem *duas* soluções ou *sómente uma* solução, conforme o lado opposto a A é *inferior* ou *superior* ao lado adjacente.

2° Caso. $A > 90^\circ$. Então o angulo obtuso B″ nunca convém, visto que a somma A + B excede 180°.

O angulo agudo B′ só convém quando ha
$$A + B' < 180^\circ \quad \text{ou} \quad A < 180^\circ - B'$$
isto é, os angulos A e 180° — B′ sendo obtusos,
$$\operatorname{sen} A > \operatorname{sen} (180^\circ - B'') \quad \text{ou} \quad \operatorname{sen} A > \operatorname{sen} B''$$
ou ainda
$$\operatorname{sen} A > \frac{b \operatorname{sen} A}{a}$$
ou emfim
$$a > b$$

Assim, quando o angulo A é *obtuso*, o problema só póde ter uma unica solução, e essa solução não existe senão no caso de ser o lado opposto a A superior ao lado adjacente dado.

O quadro seguinte resume esta argumentação, cujos resultados são todos conformes aos que se encontram em geometria. (*Geom.*)

$a < b$ sen A			0 solução
$a = b$ sen A	$A < 90^\circ$		1 solução
	$A \geqq 90^\circ$		0 solução
$a > b$ sen A	$A < 90^\circ$	$a < b$	2 soluções
		$a \geqq b$	1 solução
	$A > 90^\circ$	$a \leqq b$	0 solução
		$a > b$	1 solução

Este caso de resolução dos triangulos é denominado *caso duvidoso*, porque elle póde ter 0, 1 ou 2 soluções.

85. Calculo directo do lado c. — Conhecendo a, b e A, póde-se obter c por meio da fórmula
$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A$$
que não contém nenhuma outra incognita.

Esta equação, do segundo gráo com relação a c, póde-se pôr debaixo da fórma
$$c^2 - 2b \cos A . c + b^2 - a^2 = 0$$

Para que uma raiz d'esta equação seja acceitavel, é preciso e sufficiente que ella seja *real* e *positiva*.

Ha tres casos a distinguir conforme o signal do producto das raizes :

1° $a > b$. As raizes são reaes e de signaes contrarios ; só convém a raiz positiva. Ha sempre uma solução, e uma sómente.

2º $a=b$. Uma das raizes é nulla; a outra, igual a $2b\cos A$, só convém sendo o angulo A agudo.

3º $a<b$. O producto das raizes sendo positivo, nada se póde concluir relativamente á natureza d'essas raizes.

A condição de realidade

$$b^2\cos^2 A - b^2 + a^2 \geq 0$$

póde escrever-se

$$a \geq b \operatorname{sen} A$$

Se $a < b \operatorname{sen} A$, o triangulo é impossivel.

Se $a = b \operatorname{sen} A$, a raiz dupla, $b\cos A$, só convém sendo o angulo A agudo.

Se $a > b \operatorname{sen} A$, as raizes são do mesmo signal, do signal da somma $2b\cos A$.

Se $A < 90°$, as raizes são positivas e convêm uma e outra.

Se $A > 90°$, as raizes são negativas e ambas para rejeitar.

Todos estes resultados são conformes aos da discussão precedente.

86. Observação. — Resolvendo a equação que acaba de ser discutida, obtem-se :

$$c = b\cos A \pm \sqrt{a^2 - b^2\operatorname{sen}^2 A}$$

Se quizermos applicar estas fórmulas, resta-nos fazel-as logarithmicas. Para esse fim, pondo a^2 em factor commum debaixo de radical, escrevemol-as :

$$c = b\cos A \pm a\sqrt{1 - \frac{b^2\operatorname{sen}^2 A}{a^2}}$$

Admittindo que as raizes sejam reaes, isto é que tenhamos

$$a^2 \geq b^2\operatorname{sen}^2 A \quad \text{d'onde} \quad \frac{b\operatorname{sen} A}{a} \leq 1$$

podemos escrever: $\frac{b\operatorname{sen} A}{a} = \operatorname{sen}\varphi$ d'onde $b = \frac{a\operatorname{sen}\varphi}{\operatorname{sen} A}$

As fórmulas tornam-se :

$$c = \frac{a\operatorname{sen}\varphi\cos A}{\operatorname{sen} A} \pm a\cos\varphi.$$

ou

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}(\operatorname{sen}\varphi\cos A \pm \operatorname{sen} A\cos\varphi)$$

ou emfim

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}\operatorname{sen}(\varphi \pm A)$$

Estas fórmulas permittem calcular directamente c, por meio das taboas de logarithmos, mas como o angulo auxiliar φ não é outro senão o angulo B, do qual não se póde evitar o calculo, é tambem mais vantajoso seguir o primeiro methodo.

Exercicios numericos para indicar a disposição dos calculos.

1º Caso.

Dados $\begin{cases} a = 4562^{m} \\ B = 35° 45' 20'' \\ C = 42° 27' 40'' \end{cases}$

$$A = 180° - (B + C) = 101° 47'$$

Fórmulas $\begin{cases} b = \frac{a\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}. \ \operatorname{Log} b = \log a + \log\operatorname{sen} B + \operatorname{colog}\operatorname{sen} A \\ c = \frac{a\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}. \ \operatorname{Log} c = \log a + \log\operatorname{sen} C + \operatorname{colog}\operatorname{sen} A \end{cases}$

$\log a = 3,659\,1553$	$\log a = 3,659\,1553$
$\log\operatorname{sen} B = \bar{1},766\,6576$	$\log\operatorname{sen} C = \bar{1},829\,3615$
$\operatorname{colog}\operatorname{sen} A = 0,009\,2498$	$\operatorname{colog}\operatorname{sen} A = 0,009\,2498$
$3,435\,0627$	$3,497\,7666$
$b = 2723^{m},094$	$c = 3146^{m},06$

Calculo da superficie : $S = \frac{1}{2}a^2\frac{\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}$

$$\operatorname{Log} S = 2\log a + \log\operatorname{sen} B + \log\operatorname{sen} C + \operatorname{colog}\operatorname{sen} A + \operatorname{colog} 2$$

$2\log a = 7,318\,3106$
$\log\operatorname{sen} B = \bar{1},766\,6576$
$\log\operatorname{sen} C = \bar{1},829\,3615$
$\operatorname{colog}\operatorname{sen} A = 0,009\,2498$
$\operatorname{colog} 2 = \bar{1},698\,9700$
$6,622\,5495$

$S = 4\,193\,230^{mq}$ ou 419 hectares 32 ares 30 cent.

2º Caso.

Dados $\begin{cases} a = 24\,835^{m},36 \\ b = 18\,947^{m},24 \\ C = 45° 42' 26'',42. \end{cases}$

Calculos auxiliares $\begin{cases} a + b = 43\,782,60 \\ a - b = 5\,888,12 \\ \frac{1}{2}C = 17° 51' 13'',21. \end{cases}$

Fórmulas

$$\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - B) = \frac{a - b}{a + b}\operatorname{cotg}\frac{1}{2}C.$$

$$\operatorname{Log}\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A - B) = \log(a - b) + \operatorname{colog}(a + b) + \log\operatorname{cotg}\frac{1}{2}$$

$$c = \frac{a\operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} \quad \text{ou melhor} \quad c = \frac{(a + b)\operatorname{sen}\frac{1}{2}C}{\cos\frac{1}{2}(A - B}$$

$\log(a-b) = 3,769\,9767$
$\text{colog}(a+b) = \bar{5},358\,6984$
$\log\text{cotg}\frac{1}{2}C = 0,492\,0113$

$\bar{1},620\,6834$ $\quad \frac{1}{2}(A-B) = 22^\circ\,39'\,43''$

$\frac{1}{2}(A+B) = 72^\circ\,8'\,46'',79$

$A = 94^\circ\,47'\,89'',79\,; \quad B = 49^\circ\,29'\,3'',79$

Calculo de c

$\log(a+b) = 4,641\,2956$
$\log\text{sen}\frac{1}{2}C = \bar{1},486\,5538$
$\text{colog}\cos\frac{1}{2}(A-B) = 0,034\,8966$

$4,162\,7460$
$c = 14\,545,95$

Calculo de $S = \frac{1}{2}ab\,\text{sen}\,C$

$\log a = 4,395\,0705$
$\log b = 4,277\,5459$
$\log\text{sen}\,C = \bar{1},766\,1489$
$\text{colog}\,2 = \bar{1},698\,9700$

$8,137\,7353$
$S = 137\,320\,500^{mq}$

3º Caso. Dados $\begin{cases} a = 235^m,684 \\ b = 412^m,567 \\ c = 351^m,648 \end{cases}$ (Escola central, 1ª sessão de 1872.)

$2p = 999^m,899$

Calculos auxiliares

$p = 499,9495$	seu log é	$2,698\,9262$
$p-a = 264,2654$	id.	$2,422\,0405$
$p-b = 87,3825$	id.	$1,941\,4245$
$p-c = 148,3015$	id.	$2,171\,1456$

$2\log r = 3,835\,6844$
$\log r = 1,917\,8422$

1º METHODO:

$$\text{tg}\frac{1}{2}A = \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$
$$\text{tg}\frac{1}{2}B = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$
$$\text{tg}\frac{1}{2}C = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-c)}}$$

2º METHODO:

$$\text{tg}\frac{1}{2}A = \frac{r}{p-a}$$
$$\text{tg}\frac{1}{2}B = \frac{r}{p-b}$$
$$\text{tg}\frac{1}{2}C = \frac{r}{p-c}$$

Calculo de A.

$\log(p-b) = 1,941\,4245$
$\log(p-c) = 2,171\,1456$
$\text{colog}\,p = \bar{3},301\,0738$
$\text{colog}(p-a) = \bar{3},577\,9595$

$\bar{2},991\,6034$

$\log\text{tg}\frac{1}{2}A = \bar{1},495\,8017$
$\frac{1}{2}A = 17^\circ 23' 23'',29$
$A = 34^\circ 46' 46'',58$

Calculo de B.

$\log(p-a) = 2,422\,0405$
$\log(p-c) = 2,171\,1456$
$\text{colog}\,p = \bar{3},301\,0738$
$\text{colog}(p-b) = \bar{2},058\,5755$

$\bar{1},952\,8354$

$\log\text{tg}\frac{1}{2}B = \bar{1},976\,4177$
$\frac{1}{2}B = 43^\circ 26' 42'',63$
$B = 86^\circ 53' 25'',26$

Calculo de C.

$\log(p-a) = 2,422\,0405$
$\log(p-b) = 1,941\,4245$
$\text{colog}\,p = \bar{3},301\,0738$
$\text{colog}(p-c) = \bar{3},828\,8544$

$\bar{1},493\,3932$

$\log\text{tg}\frac{1}{2}C = \bar{1},746\,6966$
$\frac{1}{2}C = 29^\circ 9' 54'',08$
$C = 58^\circ 19' 48'',16$

Calculo de
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$

$\log p = 2,698\,9262$
$\log(p-a) = 2,422\,0405$
$\log(p-b) = 1,941\,4245$
$\log(p-c) = 2,171\,1456$

$9,233\,5368$
$\log S = 4,616\,7684$
$S = 41\,377^{mq},89$

Calculo de A.

$\log r = 1,917\,8422$
$\text{colog}(p-a) = \bar{3},577\,9595$

$\bar{1},495\,8017$

$\frac{1}{2}A = 17^\circ 23' 23'',29$
$A = 34^\circ 46' 46'',58$

Calculo de B.

$\log r = 1,917\,8422$
$\text{colog}(p-b) = \bar{2},058\,5755$

$\bar{1},976\,4177$

$\frac{1}{2}B = 43^\circ 26' 42'',63$
$B = 86^\circ 53' 25'',26$

Calculo de C.

$\log r = 1,917\,8422$
$\text{colog}(p-c) = \bar{3},828\,8544$

$\bar{1},746\,6966$

$\frac{1}{2}C = 29^\circ 9' 54'',08$
$C = 58^\circ 19' 48'',16$

Calculo de $S = pr$

$\log r = 1,917\,8422$
$\log p = 2,698\,9262$

$4,616\,7684$
$S = 41\,377^{mq},89$

Verificação: $A + B + C = 180^\circ$

4° Caso. Dados $\begin{cases} a=948^m \\ b=1250^m,7 \\ A=12°13'20'' \end{cases}$ ($A<90°$, $a<b$; 2 soluções.)

Fórmulas $\begin{cases} \operatorname{sen} B=\dfrac{b \operatorname{sen} A}{a}.\ \operatorname{Log} \operatorname{sen} B=\log b+\log \operatorname{sen} A+\operatorname{colog} a \\ C=180°-(A+B) \\ c=\dfrac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.\ \operatorname{Log} c=\log a+\log \operatorname{sen} C+\operatorname{colog} \operatorname{sen} A \end{cases}$

$$\begin{aligned} \log b &= 3,097\,1531 \\ \log \operatorname{sen} A &= \bar{1},325\,7288 \\ \operatorname{colog} a &= \bar{3},023\,1917 \\ & \overline{\bar{1},446\,0736} \end{aligned}$$

$B'=16°13'\ 6'',7,\quad B''=163°46'53'',3$
$C'=151°33'33'',3,\quad C''=\ \ 3°59'46'',7.$

	1ª Solução		2ª Solução
$\log a=$	$2,976\,8083$		$2,976\,8083$
$\log \operatorname{sen} C=$	$\bar{1},677\,8347$	ou	$2,843\,1839$
$\operatorname{colog} \operatorname{sen} A=$	$0,674\,2712$		$0,674\,2712$
	$3,328\,9142$	ou	$2,494\,2634$
$c=$	$2132^m,621$	ou	312^m0782

Calculo da superficie $S=\dfrac{1}{2}ab \operatorname{sen} C$

$\operatorname{Log} S=\log a+\log b+\log \operatorname{sen} C+\operatorname{colog} 2$

$\log a=$	$2,976\,8083$		$2,976\,8083$
$\log b=$	$3,097\,1531$		$3,097\,1531$
$\log \operatorname{sen} C=$	$\bar{1},677\,8347$	ou	$\bar{2},843\,1839$
$\operatorname{colog} 2=$	$\bar{1},698\,9700$		$\bar{1},698\,9700$
	$5,450\,7661$	ou	$4,616\,1153$
$S=$	$282\,336^{mq}$	ou	$41\,315^{mq},71$

Exercicios

1° *Estabelecer a relação que une os quatro elementos consecutivos* a, C, b, A *de um triangulo e applicar essa relação ao calculo do angulo* A.

Obtem-se a relação que se procura substituindo o angulo B em funcção dos outros dois na relação dos senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}$$

Resulta:

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} (A+C)}$$

Para resolver esta equação em relação a A, basta eliminar os denominadores, desenvolver sen (A + C) e dividir todos os termos por cos A.

Obtem-se a equação homogenea em relação a sen A e cos A.

$$a \operatorname{sen} A \cos C+a \cos A \operatorname{sen} C=b \operatorname{sen} A$$

ou

$$a \operatorname{tg} A \cos C+a \operatorname{sen} C=b \operatorname{tg} A$$

d'onde decorre:

$$\operatorname{tg} A=\frac{a \operatorname{sen} C}{b-a \cos C}$$

Para calcular o angulo A por meio d'esta fórmula será preciso fazer o segundo membro logarithmico.

2° *Resolver um triangulo sabendo que os tres lados são da fórma*

$$x,\quad x+1,\quad x+2$$

e que o angulo menor e o maior são da fórma

$$X,\quad 2X$$

O angulo maior estando opposto ao lado maior se fizermos

$$a=x,\quad b=x+1,\quad c=x+2$$

teremos $\qquad A=X \quad \text{e} \quad C=2X$

A relação $\qquad \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}=\dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$

fica sendo $\qquad \dfrac{x}{\operatorname{sen} X}=\dfrac{x+2}{\operatorname{sen} 2X}$

e da $\qquad \cos X=\dfrac{x+2}{2x} \qquad (1)$

A relação $\qquad a^2=b^2+c^2-2bc \cos A$

póde, pois, escrever-se:

$$x^2=(x+1)^2+(x+2)^2-\frac{(x+1)(x+2)^2}{x}$$

ou $\qquad x^2-3x-4=0$

d'onde $\qquad x=4$

Por conseguinte $\qquad a=4,\quad b=5,\quad c=6$

A fórmula (1) dá então

$$\cos X=\frac{3}{4}$$

e póde-se calcular $\ A=X,\quad C=2X\quad \text{e}\quad B=\pi-3X$

3° *Dado um triangulo de lados* a, b, c, *e de angulos* A, B, C, *demonstrar que os angulos agudos* x, y, z, *determinados pelas equações*

$$\cos x=\frac{a}{b+c},\quad \cos y=\frac{b}{a+c},\quad \cos z=\frac{c}{a+b}$$

verificam as relações

$$\operatorname{tg}^2\frac{x}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{y}{2}+\operatorname{tg}^2\frac{z}{2}=1$$

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}\operatorname{tg}\frac{y}{2}\operatorname{tg}\frac{z}{2}=\operatorname{tg}\frac{A}{2}\operatorname{tg}\frac{B}{2}\operatorname{tg}\frac{C}{2}.$$

Podemos escrever

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}=\frac{2\,\mathrm{sen}^2\frac{x}{2}}{2\cos^2\frac{x}{2}}=\frac{1-\cos x}{1+\cos x}=\frac{1-\frac{a}{b+c}}{1+\frac{a}{b+c}}$$

d'onde

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{p-a}{p}}$$

assim tambem $\mathrm{tg}\frac{y}{2}=\sqrt{\frac{p-b}{p}}$ e $\mathrm{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{p-c}{p}}$

Portanto,

$$\mathrm{tg}^2\frac{x}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{y}{2}+\mathrm{tg}^2\frac{z}{2}=\frac{3p-(a+b+c)}{p}=1$$

e

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}\,\mathrm{tg}\frac{z}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$$

Ora, multiplicando membro a membro as fórmulas (41) obtem-se tambem:

$$\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)(p-c)}{p^3}}$$

Logo

$$\mathrm{tg}\frac{x}{2}\,\mathrm{tg}\frac{y}{2}\,\mathrm{tg}\frac{z}{2}=\mathrm{tg}\frac{A}{2}\,\mathrm{tg}\frac{B}{2}\,\mathrm{tg}\frac{C}{2}$$

CAPITULO VI

APPLICAÇÕES AO LEVANTAMENTO DE PLANTAS.

87. Problema I. *Determinar a distancia de um ponto accessivel A a um ponto inaccessivel C.*

Escolhe-se arbitrariamente e mede-se no terreno uma base de operação AB; depois, por meio de um graphometro (*) medem-se os angulos A e B do triangulo ABC, isto é, os angulos formados com a base AB pelos raios visuaes AC, BC, dirigidos para o ponto C.

Fig. 53.

Póde-se então calcular AC no triangulo ABC, conhecendo o lado AB e os dois angulos adjacentes (nº 74).

O angulo C sendo igual a 180° — (A + B), a relação dos senos

$$\frac{AC}{\mathrm{sen}\,B}=\frac{AB}{\mathrm{sen}\,C}$$

dá

$$AC=AB\frac{\mathrm{sen}\,B}{\mathrm{sen}\,(A+B)}$$

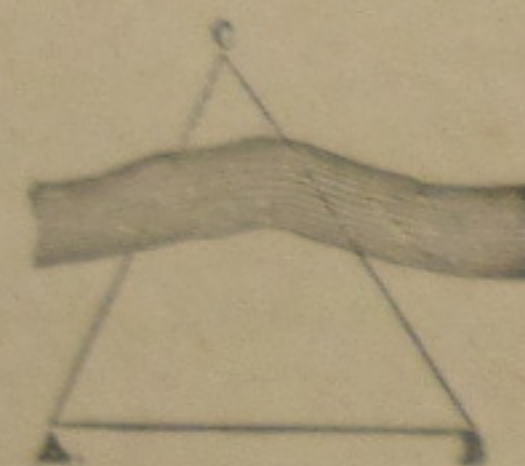
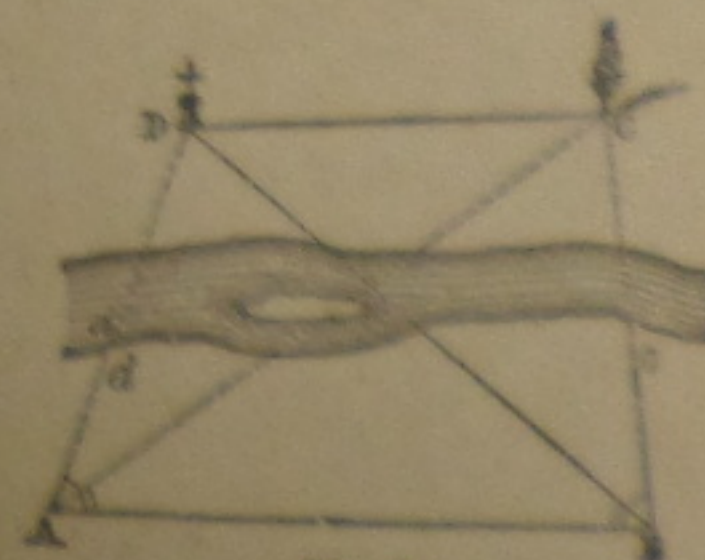
Observação. Se existir um obstaculo tal que o ponto C seja invisivel para o observador collocado em A, póde-se recorrer á solução do problema seguinte.

88. Problema II. *Determinar a distancia de dois pontos inaccessiveis C e D.*

O methodo consiste em determinar as distancias de um ponto accessivel A aos dois pontos C e D (nº 87), a medir o angulo A do triangulo ACD, conhecendo dois lados e o angulo comprehendido.

Fig. 54.

Mede-se na região accessivel, uma base AB e os angulos formados com esta base pelos raios visuaes dirigidos dos pontos A e B para os pontos C e D.

---

* Para a descripção e emprego do graphometro póde-se consultar o *Tratado de Agrimensura e de Levantamento de plantas.*

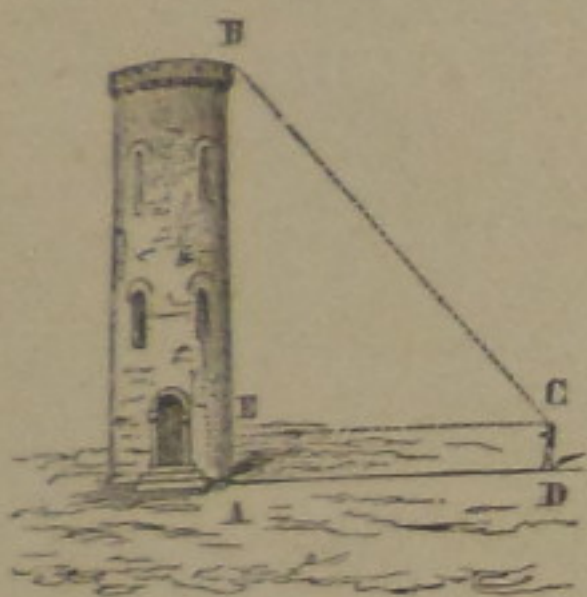
Calculam-se as distancias AC e AD nos triangulos ABC e ABD, dos quaes se conhecem os angulos e o lado commum AB.

Se os quatro pontos A, B, C, D, se acham no mesmo plano, o angulo CAD é a differença de dois angulos conhecidos DAB e CAB. No caso contrario, que é o mais geral, mede-se directamente este angulo CAD.

Então póde-se calcular a distancia incognita CD no triangulo ACD, do qual se conhece dois lados e o angulo comprehendido.

Fig. 55.

89. Problema III. *Determinar a altura de uma torre cujo pé é accessivel sobre um terreno horizontal.*

Seja a medir a altura AB.

Mede-se no terreno uma base horizontal AD, que não seja muito differente da altura que se procura; em seguida, por meio de um graphometro collocado no ponto D, mede-se o angulo ECD formado pela horizontal tirada pelo centro do graphometro no plano CAB, com o raio visual CB dirigido para o vertice do edificio *.

Póde-se então calcular a altura EB no triangulo rectangulo BEC, conhecendo-se o lado EC e o angulo agudo adjacente.

Temos $$BE = EC \operatorname{tg} ECB$$

Para ter a altura total, basta ajuntar a este resultado a altura do graphometro DC ou AE.

Obtem-se $$AB = AE + EC \operatorname{tg} ECB$$

90. Problema IV. *Determinar a altura de um edificio cujo pé inaccessivel.*

Seja determinar a altura de EM.

O methodo consiste em determinar a distancia do vertice M a um ponto accessivel D, a medir o angulo MDF formado pelo raio visual DM com a horizontal que encontra a vertical EM e a resolver depois o triangulo rectangulo MDF.

Fig. 56.

1° Supponhamos que se possa tomar sobre o solo uma base AB, que seja *horizontal* e situada *em um plano passando pela* altura EM.

Mede-se essa base; depois, collocando o graphometro em A e em B, observam-se os angulos MCF, MDF, formados pelos raios visuaes CM, DM, com a horizontal CDE que passa pelo centro do graphometro e encontra a altura EM.

* Mede-se mai facilmente o angulo de CB com a vertical do ponto C.

Então pode-se calcular a distancia DM, no triangulo CDM, do qual se conhece os angulos e o lado DC; depois a altura FM, no triangulo MDF, do qual se conhece a hypothenusa DM e o angulo agudo D.

A altura total é a somma EF + FM.

2° Se é impossivel ter-se uma base horizontal passando pelo pé da altura ou encontrando essa altura, procede-se como na questão seguinte.

91. Problema V. *Determinar a altura de uma montanha.*

Seja medir a altura MN, do vertice M acima do plano horizontal que passa por um ponto conhecido A.

O methodo consiste em determinar a distancia AM (n° 87), a medir o angulo MAN e a resolver o triangulo rectangulo MAN.

Fig. 57.

Toma-se uma base arbitraria AB, que se mede, assim como os angulos formados com esta base pelos raios visuaes AM, BM, dirigidos para o vertice. Mede-se tambem o angulo MAE formado pelo raio AM com a vertical AE; este angulo, igual a NMA é o complemento de MAN.

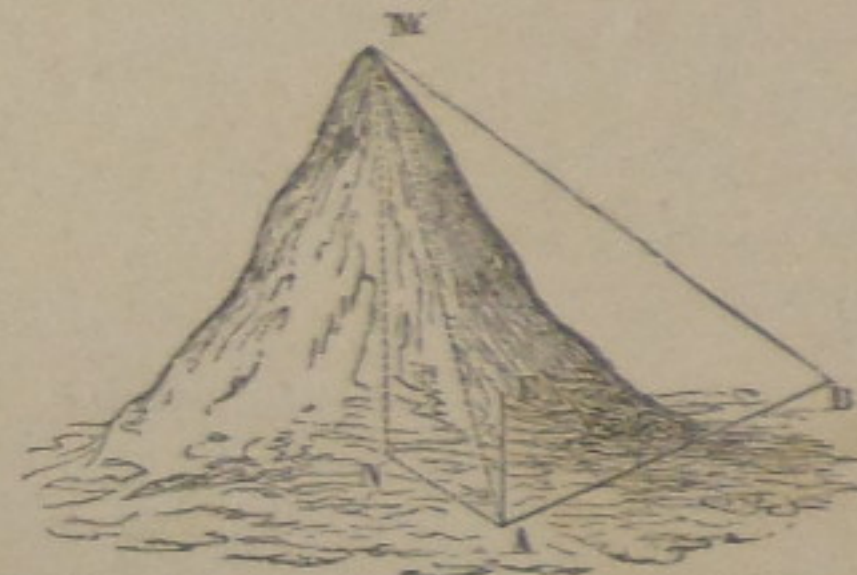
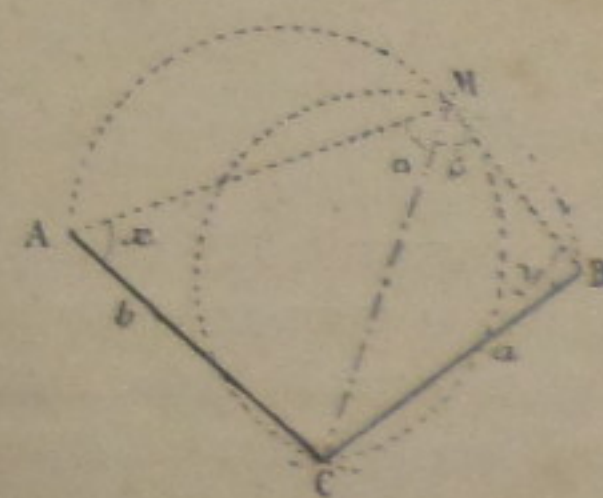
Então póde-se calcular a distancia AM, no triangulo ABM, do qual se conhece os angulos e um lado; depois a altura MN, no triangulo AMN, do qual se conhece a hypothenusa e um angulo agudo.

92. Problema do mappa. *Tres pontos* A, B, C, *situados em um plano horizontal, sendo reproduzidos no mappa de um paiz, determinar a posição de um quarto ponto do mesmo plano, de onde as distancias* CA, CB *foram vistas de baixo de angulos medidos* α, β.

Fig. 58.

A solução geometrica é muito simples: basta descrever sobre AC e sobre BC, como cordas, segmentos capazes dos angulos medidos α e β. Os arcos descriptos têm dois pontos communs: o ponto C e um ponto M; este ultimo responde á questão.

Se tivermos $\alpha + \beta + ACB = 180°$

o quadrilatero ACBM é inscriptivel. Então as duas circumferencias auxiliares se confundem, e a posição do ponto M sobre esta circumferencia unica é indeterminada.

Solução trigonometrica. Conhecem-se os comprimentos CA = c, CB = b e o angulo ACB = C. Tomemos por incognitas os angulos

$$CAM = x \quad \text{e} \quad CBM = y$$

A somma dos angulos de um quadrilatero sendo gual a quatro rectos, temos $x+y=360^\circ-(C+\alpha+\beta)$

Os triangulos AMC, BMC dão as relações dos senos (1)

$$\frac{\operatorname{sen} x}{CM}=\frac{\operatorname{sen}\alpha}{a} \quad \text{e} \quad \frac{\operatorname{sen} y}{CM}=\frac{\operatorname{sen}\beta}{b}$$

Dividindo estas duas proporções membro a membro, obtem-se

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta} \qquad (2)$$

Assim a questão resume-se em calcular dois angulos x e y conhecendo sua somma e a relação de seus senos. Basta applicar a solução conhecida.

A equação (2) póde escrever-se successivamente

$$\frac{\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y}=\frac{b\operatorname{sen}\alpha-a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha+a\operatorname{sen}\beta}$$

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{1-\frac{a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha}}{1+\frac{a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha}}$$

Se puzermos $\frac{a\operatorname{sen}\beta}{b\operatorname{sen}\alpha}=\operatorname{tg}\varphi$ (3)

a equação precedente torna-se

$$\frac{\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}}{\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}}=\frac{1-\operatorname{tg}\varphi}{1+\operatorname{tg}\varphi}=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)$$

d'onde $\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}(45^\circ-\varphi)\operatorname{tg}\frac{x+y}{2}$ (4)

A fórmula (1) dá $x+y$, e as formulas (3), (4) permittem achar nas taboas o menor valor positivo do angulo φ, e depois do angulo $x-y$. Conhecendo a somma e a differença dos angulos x e y, obtem-se facilmente estes ultimos.

Observação. No caso especial

$$\alpha+\beta+C=180^\circ$$

a fórmula (1) dá

$$x+y=180^\circ \quad \text{d'onde} \quad \operatorname{sen} x=\operatorname{sen} y$$

as fórmulas (2) e (3) ficam sendo

$$\frac{\operatorname{sen} x}{\operatorname{sen} y}=\frac{b\operatorname{sen}\alpha}{a\operatorname{sen}\beta}=\frac{1}{\operatorname{tg}\varphi}=1$$

Temos pois $\operatorname{tg}\varphi=1$ d'onde $\varphi=45^\circ$

O segundo membro da fórmula (4) toma então a fórma

$$\operatorname{tg}\frac{x-y}{2}=\operatorname{tg}0^\circ.\operatorname{tg}90^\circ=0\times\infty$$

symbolo de indeterminação. A indeterminação é real, como já se viu geometricamente.

94. Problema VII. *Determinar o raio de uma torre ou de um recinto circular inaccessivel.*

Sejam O o centro da secção recta feita na torre pelo plano horizontal que passa por um ponto exterior A, e C o ponto do contacto de um raio visual ACM tangente a essa secção.

Fig. 59.

O triangulo rectangulo OCA dá

$$OC=R=OA\operatorname{sen}OAC \qquad (1)$$

Tudo reduz-se a determinar o angulo OAC e a distancia OA.

Mede-se uma base horizontal AB e os angulos

$$BAM=\alpha,\quad BAP=\alpha',\quad ABM'=\beta,\quad ABP=\beta'$$

formados por esta base com os raios visuaes tangentes á torre.

As rectas AO, BO sendo as bissectrizes dos angulos PAM e PBM', temos

$$OAC=\frac{\alpha-\alpha'}{2}$$

$$BAO=\frac{\alpha+\alpha'}{2} \quad \text{e} \quad ABO=\frac{\beta+\beta'}{2}$$

O comprimento OA obtem-se no triangulo OAB, do qual se conhecem os angulos e um lado.

$$OA=AB\frac{\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}(A+B)}$$

A expressão (1) torna-se

$$R=AB.\frac{\operatorname{sen}B\operatorname{sen}OAC}{\operatorname{sen}(A+B)}$$

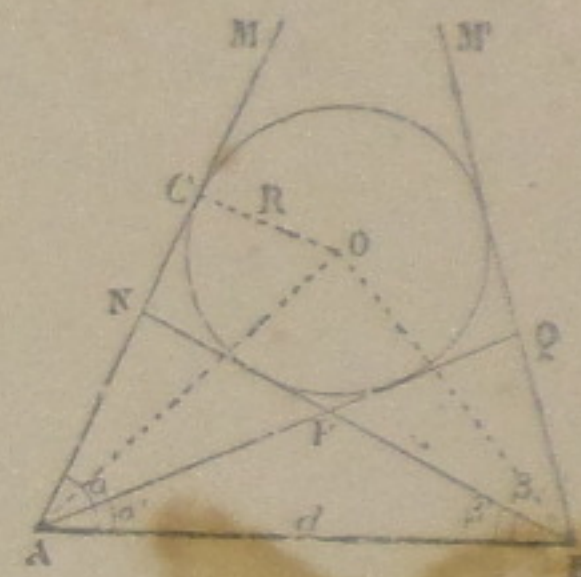
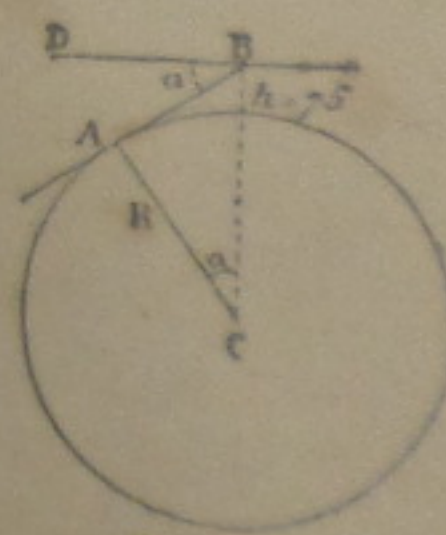
isto é

$$R=AB.\frac{\operatorname{sen}\frac{\beta+\beta'}{2}\operatorname{sen}\frac{\alpha-\alpha'}{2}}{\operatorname{sen}\frac{\alpha+\alpha'+\beta+\beta'}{2}}$$

95. Problema VIII. *Calcular o raio do globo terrestre, sabendo que a depressão do horizonte é α para o observador collocado n'uma altura h acima do nivel do mar.*

Fig. 60.

Sejam C o centro do globo, B o olho do observador e A o ponto de contacto do raio visual BA tangente á superficie do mar.

A depressão do horizonte é o angulo ABD que forma esse raio visual com o horizonte visual BD.

Os angulos BCA e DBA ou α são iguaes como tendo seus lados perpendiculares.

O triangulo rectangulo BAC dá

$$AC = BC \cos \alpha$$

ou

$$R = (R + h) \cos \alpha$$

d'onde

$$R = \frac{h \cos \alpha}{1 - \cos \alpha}$$

e tornando logarithmico o denominador

$$R = \frac{h \cos \alpha}{2 \operatorname{sen}^2 \frac{\alpha}{2}}$$

CAPITULO VII

RESOLUÇÃO DOS TRIANGULOS FÓRA DOS CASOS ELEMENTARES

---

§ I. — Calculo dos elementos secundarios de um triangulo em funcção dos elementos principaes.

96. Raio R do circulo circumscripto. Theorema. — *Em todo triangulo, o diametro do circulo circumscripto é igual á rasão de cada lado para o seno do angulo opposto.*

Fig. 61.

Tracemos o diametro BA' do circulo circumscripto, juntemos depois CA'. O triangulo rectangulo BA'C dá

$$BC = 2R \operatorname{sen} A'$$

Mas o angulo A' é igual ao angulo A.

Assim,

$$a = 2R \operatorname{sen} A$$

Logo

$$2R = \frac{a}{\operatorname{sen} A}$$

Desde que a designa um qualquer dos lados do triangulo, segue-se que cada lado de um triangulo está para o seno do angulo opposto em rasão constante.

É uma segunda demonstração da relação dos senos (nº 69) :

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = 2R \qquad (43)$$

Observação. — Demonstra-se em geometria a relação (*Geom.* nº 316, 3º)

$$abc = 4RS$$

que dá

$$2R = \frac{abc}{2S} = \frac{abc}{2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}$$

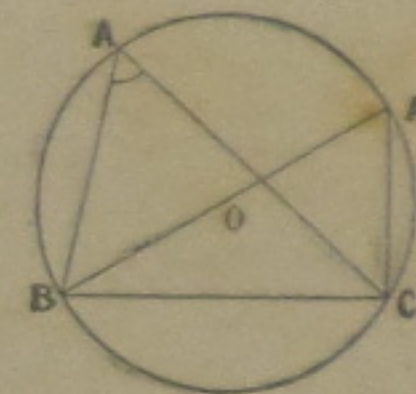
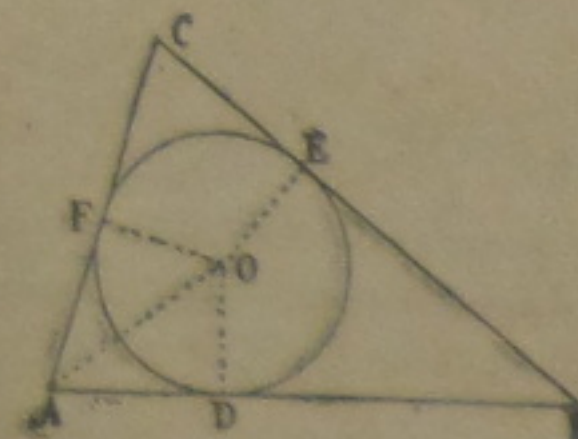
e, por conseguinte

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C} = \frac{abc}{2S} \qquad (44)$$

97. Raios r, r_a, r_b, r_c, dos circulos inscriptos e ex-inscriptos.

Fig. 62.

1º Sejam D, E, F os pontos de contacto do circulo inscripto O, com os lados AB, BC, CA. Os triangulos OAD, OBE, OCF dão

$$r = AD \operatorname{tg} \frac{A}{2} = BE \operatorname{tg} \frac{B}{2} = CF \operatorname{tg} \frac{C}{2}$$

Ora
$$AD=(AD+CE+EB)-BC=p-a$$
$$BE=p-b, \qquad CF=p-c$$

Logo
$$r=(p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{tg}\frac{C}{2} \qquad (45)$$

2º Obtem-se por um calculo analogo
$$r_a=p\operatorname{tg}\frac{A}{2}=(p-b)\operatorname{cotg}\frac{C}{2}=(p-c)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}$$
$$r_b=p\operatorname{tg}\frac{B}{2}=(p-c)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}=(p-a)\operatorname{cotg}\frac{C}{2} \qquad (46)$$
$$r_c=p\operatorname{tg}\frac{C}{2}=(p-a)\operatorname{cotg}\frac{B}{2}=(p-b)\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

Observação. — Demonstra-se em geometria (*Geom.*) as relações
$$S=pr=(p-a)r_a=(p-b)r_b=(p-c)r_c$$
d'onde se tira
$$S=\sqrt{r\,r_a r_b r_c}$$

98. Alturas h_a, h_b, h_c.

1º Igualemos entre si duas expressões da área do triangulo, depois substituamos b e c em funcção de a e dos angulos. Resulta
$$2S=ah_a=bc\operatorname{sen}A=\frac{a\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}A}\cdot\frac{a\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}\cdot\operatorname{sen}A$$
d'onde
$$h_a=\frac{a\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A} \qquad (47)$$
assim tambem $h_b=\dfrac{b\operatorname{sen}A\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}B}$ e $h_c=\dfrac{c\operatorname{sen}A\operatorname{sen}B}{\operatorname{sen}C}$

2º Temos
$$2S=ah_a=bh_b=ch_c=2\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \qquad (48)$$

Essas equações dão immediatamente cada altura em funcção dos tres lados.

3º Os triangulos rectangulos determinados pelas alturas
$$h_a=b\operatorname{sen}C=c\operatorname{sen}B \qquad (49)$$
$$h_b=a\operatorname{sen}C=\text{ etc.}$$

99. Medianas. — Se prolongar-se a mediana $AM=m$ de um comprimento MA' igual a si mesma, o angulo ABA' é igual a 180° — A, e o triangulo ABA' permitte que se escreva
$$\overline{AA'}^2=4m^2=b^2+c^2+2bc\cos A$$
Os triangulos AMC, AMB dão tambem
$$m^2=b^2+\frac{a^2}{4}-ab\cos C=c^2+\frac{a^2}{4}-ac\cos B$$

Emfim, demonstra-se em geometria (*Geom.*, nº 254) a fórmula
$$b^2+c^2=2\left(m^2+\frac{a^2}{4}\right)$$
d'onde póde tirar-se o valor de m em funcção dos tres lados.

100. Angulo d'uma mediana com o lado opposto.
Supponhamos $B>C$. Seja $AMB=M$ o angulo a calcular, e designemos por H o pé da altura $AH=h$.

Temos
$$HM=\frac{1}{2}(HC-HB)$$
ou, por causa dos triangulos rectangulos
$$h\operatorname{cotg}M=\frac{1}{2}(h\operatorname{cotg}C-h\operatorname{cotg}B)$$
d'onde
$$\operatorname{cotg}M=\frac{\operatorname{cotg}C-\operatorname{cotg}B}{2} \qquad (50)$$

101. Bissectrizes interiores α, β, γ. A bissectriz α determina do triangulos parciaes cuja somma das áreas é egual á área do triangulo ABC. Temos
$$2S=\alpha c\operatorname{sen}\frac{A}{2}+\alpha b\operatorname{sen}\frac{A}{2}=bc\operatorname{sen}A$$
d'onde, supprimindo o factor sen $\frac{A}{2}$
$$\alpha=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2} \qquad (51)$$
ou, substituindo $\cos\frac{A}{2}$ em funcção dos tres lados
$$\alpha=\frac{2}{b+c}\sqrt{p(p-a)bc}$$
Assim tambem
$$\beta=\frac{2ac}{a+c}\cos\frac{B}{2}=\frac{2}{a+c}\sqrt{p(p-b)ac}$$
$$\gamma=\frac{2ab}{a+b}\cos\frac{C}{2}=\frac{2}{a+b}\sqrt{p(p-c)ab}$$

102. Bissectrizes exteriores. A bissectriz exterior α', procedente do vertice A, determina dois triangulos cuja differença das áreas é igual á área do triangulo ABC. Temos
$$2S=b\alpha'\operatorname{sen}\left(90+\frac{A}{2}\right)-c\alpha'\operatorname{sen}\left(90-\frac{A}{2}\right)=bc\operatorname{sen}A$$
ou
$$\alpha'\left(b\cos\frac{A}{2}-c\cos\frac{A}{2}\right)=2bc\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

d'onde
$$\alpha' = \frac{2bc}{b-c} \operatorname{sen} \frac{A}{2} \qquad (52)$$

e substituindo sen $\frac{A}{2}$ em funcção dos tres lados

$$\alpha' = \frac{2}{b-c} \sqrt{(p-b)(p-c)\,bc}$$

§ II. Expressão dos diversos elementos de um triangulo em funcção dos angulos e do raio do circulo circumscripto.

103. Lados. As relações (43) dão immediatamente

$$a = 2R \operatorname{sen} A$$
$$b = 2R \operatorname{sen} B \qquad (53)$$
$$c = 2R \operatorname{sen} C$$

104. Alturas. Combinando-se estas ultimas formulas com as (49) vem

$$h_a = b \operatorname{sen} C = 2R \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$$
$$h_b = 2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C \qquad (54)$$
$$h_c = 2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B$$

105. Superficie. As relações (53 e 54) permittem escrever

$$S = \frac{1}{2} a h_a = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \qquad (55)$$

106. Bissectrizes. Substituindo cada lado por seu valor (53), as fórmulas (51) ficam sendo

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c} \cos \frac{A}{2} = \frac{8R^2 \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C \cos \frac{A}{2}}{2R(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C)}$$

Mas,

$$\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C = \operatorname{sen} \frac{B+C}{2} \cos \frac{B-C}{2} = 2 \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B-C}{2}$$

Logo

$$\alpha = 2R \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\cos \frac{B-C}{2}}$$

$$\beta = 2R \frac{\operatorname{sen} C \operatorname{sen} A}{\cos \frac{C-A}{2}} \qquad (56)$$

$$\gamma = 2R \frac{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}{\cos \frac{A-B}{2}}$$

As bissectrizes interiores exprimem-se de modo analogo

$$\alpha' = 2R \frac{\operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} \frac{C-B}{2}}, \text{ etc...} \qquad (57)$$

107. Semi-perimetro e differenças $p-a$, $p-b$, $p-c$. Em vista das fórmulas (53), temos

$$2p = a + b + c = 2R(\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C$$

d'onde, substituindo a somma dos senos por um producto,

$$p = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{c}{2} \qquad (58)$$

Assim tambem :

$$2(p-a) = b + c - a = 2R(\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C - \operatorname{sen} A)$$

logo
$$p - a = 4R \cos \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$
$$p - b = 4R \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \qquad (59)$$
$$p - c = 4R \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$

108. Raios dos circulos inscriptos e ex-inscriptos. Se levarmos em conta as quatro fórmulas que precedem, as relações (45) e (46) ficam sendo

$$r = (p-a) \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

ou
$$r = 4R \operatorname{sen} \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2} \qquad (60)$$

$$r_a = p \operatorname{tg} \frac{A}{2} = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \cdot \operatorname{tg} \frac{A}{2}$$

d'onde
$$r_a = 4R \operatorname{sen} \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2}$$
$$r_b = 4R \cos \frac{A}{2} \operatorname{sen} \frac{B}{2} \cos \frac{C}{2} \qquad (61)$$
$$r_c = 4R \cos \frac{A}{2} \cos \frac{B}{2} \operatorname{sen} \frac{C}{2}$$

§ III. Resolução de alguns triangulos.

109. Tres methodos para a resolução de um triangulo. Quando os dados de um triangulo comprehendem um ou mais elementos secundarios, exprimem-se em primeiro logar estes ultimos em funcção dos elementos principaes, conhecidos ou incognitos; só resta depois resolver as equações obtidas em relação aos elementos não dados.

As mais das vezes só se obtem com facilidade uma parte dos angulo ou dos lados procurados; mas póde-se considerar o triangulo como resolvido desde que temos assim um dos casos elementares.

Na procura dos elementos principaes, póde-se seguir tres marchas distinctas :

1º Solução trigonometrica : *Começa-se por calcular os angulos.* Este processo baseia-se em transformações trigonometricas muito elegantes e conduz ordinariamente a resultados calculaveis por logarithmos.

2º Solução algebrica : *Calculam-se primeiramente os lados.* Este processo exige sómente calculos e discussões puramente algebricas e assaz uniformes; mas chega-se a fórmulas que, em geral, não são logarithmicas.

3º Solução geometrica : *Começa-se por construir o triangulo geometricamente, depois deduzem-se os calculos d'esta construcção.*

Se compararmos os resultados obtidos por estes tres methodos, é evidente que se verifica existir entre elles perfeita identidade.

Observação. Ás vezes, em logar de procurar directamente os elementos principaes do triangulo, calculam-se, por meio dos dados, outros elementos secundarios cujo conhecimento reduz a questão a algum outro problema anteriormente resolvido.

110. Problema I. *Resolver um triangulo, conhecendo um angulo* A, *e o lado opposto* a *e a somma* $b+c=l$ *dos dois outros lados.*

Solução trigonometrica. Faz-se apparecer a somma dada $b+c=l$, addicionando termo a termo duas rasões da relação dos senos; temos a equação

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{\operatorname{sen} b+c}{\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C}$$

d'onde se tira
$$\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C=\frac{l \operatorname{sen} A}{a}$$

Além d'isso
$$B+C=180^\circ-A$$

Póde-se pois calcular os angulos B e C, conhecendo a somma d'elles e a somma de seus senos.

Para que uma solução seja acceitavel, é preciso que cada um dos angulos B e C esteja comprehendido entre 0º e 180º.

Conhecendo os angulos e um lado do triangulo a resolver, cahimos no primeiro caso elementar.

Solução algebrica. Os lados são determinados pelas duas equações

$$b+c=l$$
$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

Subtrahindo membro a membro a segunda do quadrado da primeira, obtemos

$$l^2-a^2=2bc(1+\cos A)=4bc\cos^2\frac{A}{2}$$

d'onde
$$bc=\frac{l^2-a^2}{4\cos^2\frac{A}{2}}$$

A questão reduz-se a achar dois numeros, conhecendo a sua somma e o seu producto.

Conhecendo os lados e um angulo do triangulo proposto, obter-se-hão os outros dois angulos pela relação dos senos.

Solução geometrica. Seja ABC um triangulo que responda á questão. Se prolongar-se CA de um comprimento AM igual a AB, o triangulo BAM sendo isosceles, cada um dos angulos ABM, AMB é igual a $\frac{A}{2}$.

Fig. 63.

Póde-se pois construir o triangulo BCM conhecendo dois lados e o angulo opposto a um d'elles (nº 84), depois deduzir d'elles o triangulo ABC levantando a perpendicular PA no meio de BM.

Isto posto, o triangulo CBM dá a relação dos senos

$$\frac{a}{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}=\frac{l}{\operatorname{sen}\left(B+\frac{A}{2}\right)}$$

d'onde se tira
$$\operatorname{sen}\left(B+\frac{A}{2}\right)=\frac{l}{a}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

Esta equação permitte que se calcule o angulo $B+\frac{A}{2}$, e por conseguinte o angulo B.

Conhecendo a, A e B, cahimos no primeiro caso elementar.

111. Problema II. *Resolver um triangulo, conhecendo dois lados* b, c, *e a bissectriz* α *do angulo comprehendido.*

Solução trigonometrica. A bissectriz tem por expressão

(nº 101)
$$\alpha=\frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

Esta equação dá

$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\alpha(b+c)}{2bc}$$

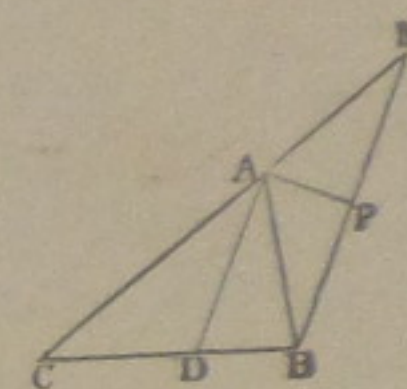
o que equivale a resolver um triangulo, conhecendo dois lados e o angulo comprehendido.

Solução algebrica. Sejam x e y os segmentos determinados pela bissectriz sobre o lado a. Temos (*Geom.*).

$$\frac{x}{b}=\frac{y}{c}$$

e
$$x+y=a$$
$$bc=\alpha^2+xy$$

A primeira equação póde escrever-se

$$\frac{x+y}{b+c}=\sqrt{\frac{xy}{bc}}$$

ou, tendo em conta as duas outras

$$\frac{a}{b+c}=\sqrt{\frac{bc-\alpha^2}{bc}}$$

d'ella se tira
$$a=(b+c)\sqrt{\frac{bc-\alpha^2}{bc}}$$

Tudo se reduz em resolver um triangulo, conhecendo os tres lados.

Solução geometrica. Seja ABC o triangulo determinado pelos lados $AB=c$, $AC=b$ e a bissectriz $AD=\alpha$ (fig. 63).

Tracemos a DA a parallela BM que encontra em M o prolongamente de CA.

O angulo M é igual a $\frac{A}{2}$, e o segmento AM é igual a c

Os triangulos semelhantes CBM, CDA dão

$$\frac{BM}{\alpha}=\frac{CM}{CA} \quad \text{d'onde} \quad BM=\frac{\alpha(b+c)}{b}$$

No triangulo CMB conhecem-se dois lados MC, MB e o angulo comprehendido.

Podemos pois construir esse triangulo e d'elle deduzir o triangulo ABC levantando a perpendicular PA no meio de BM.

Isto posto, o triangulo isosceles BAM dá

$$BM=2PM=2c\cos\frac{A}{2}$$

Igualando duas expressões de BM obtem-se,

$$2c\cos\frac{A}{2}=\frac{\alpha(b+c)}{b}$$

d'onde
$$\cos\frac{A}{2}=\frac{\alpha(b+c)}{2bc}$$

fórmula já achada.

112. Problema III. *Resolver um triangulo conhecendo a altura* h, *a base* a *e a differença* $B-C=\delta$ *dos angulos adjacentes.*

A altura dada tem por expressão (nº 98)

$$h=\frac{a\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C}{\operatorname{sen}A}$$

Em virtude das identidades

$$2\operatorname{sen}B\operatorname{sen}C=\cos(B-C)-\cos(B+C)$$

e
$$\operatorname{sen}A=\operatorname{sen}(B+C)$$

esta equação póde escrever-se

$$h=\frac{a}{2}\,\frac{\cos\delta-\cos(B+C)}{\operatorname{sen}(B+C)}$$

ou
$$2h\operatorname{sen}(B+C)+a\cos(B+C)=a\cos\delta$$

equação de fórma conhecida, que dá a somma $B+C$.

Conhecendo os angulos B e C, recáe-se no primeiro caso elementar.

113. Problema IV. — *Resolver um triangulo, conhecendo um angulo* A, *um lado adjacente* b *e a differença* $c-a=l$ *dos outros dois lados.*

Processo trigonometrico. — Procuremos os angulos B e C

Temos
$$B=180^\circ-(A+C)$$

A relação dos senos póde escrever-se

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}(A+C)}=\frac{c}{\operatorname{sen}C}$$

ou
$$\frac{b}{c-a}=\frac{\operatorname{sen}(C+A)}{\operatorname{sen}C-\operatorname{sen}A}=\frac{\operatorname{sen}\frac{C+A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C-A}{2}}$$

ou ainda
$$\frac{b+l}{b-l}=\frac{\operatorname{sen}\frac{C+A}{2}+\operatorname{sen}\frac{C-A}{2}}{\operatorname{sen}\frac{C+A}{2}-\operatorname{sen}\frac{C-A}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

d'onde emfim
$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\frac{b+l}{b-l}\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

Conhecendo A, C e b, recaímos no primeiro caso elementar.

Por outra fórma. — A relação dos senos poderia ter sido escripta assim

$$\frac{b+c-a}{b-c+a}=\frac{\operatorname{sen}B+\operatorname{sen}C-\operatorname{sen}A}{\operatorname{sen}B-\operatorname{sen}C+\operatorname{sen}A}$$

ou
$$\frac{b+l}{b-l}=\frac{4\cos\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\operatorname{sen}\frac{C}{2}}{4\operatorname{sen}\frac{A}{2}\operatorname{sen}\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}=\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}$$

Por outra fórma. — As fórmulas de resolução do terceiro caso elementar conduzem mais rapidamente ao mesmo resultado. Dividindo membro a membro as duas relações.

$$\operatorname{tg}\frac{C}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}}$$

vem
$$\frac{\operatorname{tg}\frac{C}{2}}{\operatorname{tg}\frac{A}{2}}=\frac{p-a}{p-c}=\frac{2(b+c-a)}{2(b-c+a)}=\frac{b+l}{b-l}$$

PROCESSO ALGEBRICO. Obtem-se os lados c e a por meio das duas equações.

$$\begin{cases} c-a=l \\ a^2=b^2+c^2-2bc\cos A \end{cases}$$

A primeira póde escrever-se

$$a=c-l$$

e a segunda torna-se em

$$(c-l)^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

d'onde

$$c=\frac{b^2-l^2}{2(b\cos A-l)}$$

Para que os lados a e c sejam ambos positivos, é preciso e sufficiente que a expressão de c esteja comprehendida entre 0 e l.

114. Problema V. — *Resolver um triangulo, conhecendo as tres alturas* h_a, h_b, h_c.

As relações $2S=ah_a=bh_b=ch_c$

podem escrever-se

$$\frac{a}{\frac{1}{h_a}}=\frac{b}{\frac{1}{h_b}}=\frac{c}{\frac{1}{h_c}}$$

Estas relações mostram que *todo triangulo é semelhante ao triangulo que teria para lados as inversas das tres alturas*. Os angulos de triangulo proposto são pois iguaes aos do triangulo cujos lados são $\frac{1}{h_a}, \frac{1}{h_b}, \frac{1}{h_c}$; podemos, pois, obtel-os por meio das fórmulas de resolução do 3° caso elementar.

Os lados são então dados pelas relações

$$2S=ab\text{ sen }C=bh_b$$

d'onde se tira

$$a=\frac{h_b}{\text{sen }C}$$

como tambem

$$b=\frac{h_c}{\text{sen }A} \quad \text{e} \quad c=\frac{h_a}{\text{sen }B}$$

115. Problema VI. — *Resolver um triangulo, conhecendo os angulos A, B, C e o raio R do circulo circumscripto*

As fórmulas (53) e (55) dão immediatamente os lados

$$a=2R\text{ sen }A, \quad b=2R\text{ sen }B, \quad c=2R\text{ sen }C$$

e a superficie

$$S=\frac{abc}{4R}=2R^2\text{ sen }A\text{ sen }B\text{ sen }C$$

Observação. — Reduz-se a este problema tão simples a resolução de qualquer triangulo dado pelos angulos e por um elemento secundario qualquer.

Para isso, basta calcular R em funcção dos angulos e do elemento secundario conhecido. Exprime-se primeiramente este em funcção de A, B, C e de R, o que é sempre possivel (nos 103 e seguintes); depois resolve-se a relação obtida no que respeita a R, e só falta então substituir R por seu valor nas fórmulas de resolução do problema VI (nº 115).

116. Problema VII. — *Resolver um triangulo, conhecendo os angulos* A, B, C *e a superficie* S.

Siga-se a marcha que acaba de ser indicada

A fórmula (55) dá

$$S=2R^2\text{ sen }A\text{ sen }B\text{ sen }C$$

d'onde

$$2R=\sqrt{\frac{2S}{\text{sen }A\text{ sen }B\text{ sen }C}}$$

As fórmulas de resolução do problema VI tornam-se

$$a=\sqrt{\frac{2S\text{ sen }A}{\text{sen }B\text{ sen }C}}, \quad b=\sqrt{\frac{2S\text{ sen }B}{\text{sen }A\text{ sen }C}}, \quad c=\sqrt{\frac{2S\text{ sen }C}{\text{sen }A\text{ sen }B}}$$

Obtem-se tambem estes resultados por meio das fórmulas (35, nº 74), que exprimem a superficie em funcção dos angulos e de um só lado.

Observação. — Proceder-se-hia da mesma maneira se, com os angulos A, B, C se désse a altura h_a, ou a bissectriz α, ou o perimetro $2p$, ou o raio r, etc...

Assim, as fórmulas (54), (56), (58), (60)... dão respectivamente

$$2R=\frac{h_a}{\text{sen }B\text{ sen }C}, \quad 2R=\frac{\alpha\cos\frac{B-C}{2}}{\text{sen }B\text{ sen }C}$$

$$2R=\frac{p}{2\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}}, \quad 2R=\frac{r}{2\text{ sen }\frac{A}{2}\text{ sen }\frac{B}{2}\text{ sen }\frac{C}{2}}$$

e tudo se reduz a substituir uma ou outra d'essas expressões no logar de 2R, nas fórmulas que resolvem o caso simples de que se trata (nº 115).

Vê-se o quanto é util saber achar rapidamente as fórmulas dos nos 103 e seguintes.

Exercicios.

Triangulos rectangulos.

1° *Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypothenusa a razão* $\frac{b}{c}=m$ *dos lados do angulo recto.*

SOLUÇÃO TRIGONOMETRICA. — Temos

$$m=\frac{b}{c}=\frac{a\text{ sen }B}{a\cos B}=\text{tg }B$$

O angulo B sendo conhecido, recáe-se no 1º caso.

Solução algebrica. — Os lados são determinados pelas duas equações

$$\frac{b}{c}=m$$

e

$$b^2+c^2=a^2$$

2º *Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypothenusa* a *e a altura correspondente* h.

Solução trigonometrica. — Igualando duas expressões da superficie do triangulo, obtem-se

$$ah=bc$$

Ora $$b=a \text{ sen B} \quad \text{e} \quad c=a \cos B$$

logo $$ah=a^2 \text{ sen B} \cos B$$

d'onde $$\text{sen } 2B=\frac{2h}{a}$$

Conhecemos agora a hypothenusa e um angulo agudo.

Solução algebrica. — Os lados são dados pelas equações

$$bc=ah$$

e

$$b^2+c^2=a^2$$

3º *Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypothenusa* a *e a differença* b — c = d *dos outros dois lados.*

Solução trigonometrica. — Se substituirmos b e c em funcção dos angulos, a equação dada passa a ser

$$d=a(\text{sen B}-\text{sen C})=2a \text{ sen}\frac{B-C}{2}\cos 45°$$

D'ella se tira : $$\text{sen}\frac{B-C}{2}=\frac{d}{2a\cos 45°}=\frac{d}{a\sqrt{2}}$$

Conhecendo a somma e a differença dos dois angulos, obtemos facilmente os angulos, e depois os lados.

Solução algebrica. — Os lados são determinados pelas duas equações

$$b-c=d$$

$$b^2+c^2=a^2$$

4º *Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypothenusa* a *e o raio* r *do circulo inscripto.*

Vêmos immediatamente, n'uma figura, que temos n'um triangulo rectangulo $$b+c=a+2r$$

Devemos pois resolver um triangulo rectangulo, conhecendo a hypothenusa e a somma dos lados do angulo recto; questão de todo semelhante á precedente.

Assim, a equação precedente póde escrever-se :

$$a+2r=a(\text{sen B}+\text{sen C})=2a \text{ sen } 45° \cos\frac{B-C}{2}$$

d'onde $$\cos\frac{B-C}{2}=\frac{a+2r}{a\sqrt{2}}, \text{ etc...}$$

5º *Resolver um triangulo isosceles, conhecendo a altura principal* h *e o raio* r *do circulo inscripto.*

Fig. 64.

Seja A o angulo do vertice. A altura divide o triangulo considerado em dois triangulos rectangulos iguaes que são faceis de resolver. Effectivamente, os angulos B e C são complementares de $\frac{A}{2}$, e se unirmos o centro do circulo inscripto a um de seus pontos de contacto com os lado iguaes, temos (Th. 1º):

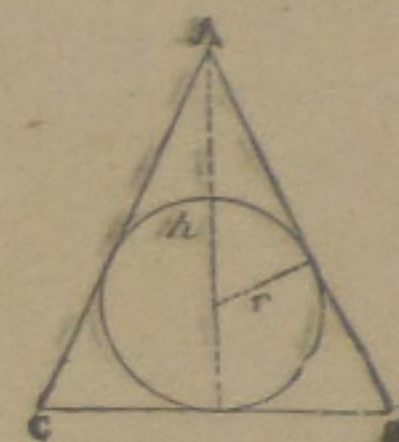
$$r=(h-r)\text{sen}\frac{A}{2}, \text{ d'onde sen}\frac{A}{2}=\frac{r}{h-r}$$

os tres angulos estão pois determinados.

Os lados se obtêm pelas relações :

$$\frac{a}{2}=h \text{ tg}\frac{A}{2} \quad \text{ou} \quad a=2h \text{ tg}\frac{A}{2}$$

e

$$c=b=\frac{h}{\text{sen B}}=\frac{h}{\cos\frac{A}{2}}$$

Triangulos quaesquer.

6º *Resolver um triangulo, conhecendo um angulo* A, *o lado opposto* a *e a razão* $\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$ *dos outros dois lados.*

Solução trigonometrica. — Calculam-se os angulos B e C, conhecendo a somma d'elles $$B+C=180°-A$$
e a relação de seus senos

$$\frac{\text{sen B}}{\text{sen C}}=\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$$

Esta questão foi resolvida.

Solução algebrica. — Os lados b e c são dados pelo systema d'equações

$$\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$$

e

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$$

que não contém nenhuma outra incognita.

7º *Resolver um triangulo, conhecendo um lado* b, *a altura correspondente* h *e o raio* R *do circulo circumscripto.*

Temos (nº 103) $b = 2R \operatorname{sen} B$

e (nº 104) $h = 2R \operatorname{sen} A \operatorname{sen} C$

A primeira equação dá

$$\operatorname{sen}(A+C) = \operatorname{sen} B = \frac{b}{2R}$$

e a segunda $$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} C = \frac{h}{2R}$$

Reduz-se a questão a calcular dois angulos A, C, dos quaes conhecemos a somma e o producto dos senos.

8º *Resolver um triangulo, conhecendo um lado* a, *a somma* b + c *dos outros dois e o raio* r *do circulo inscripto.*

A fórmula (45) $$r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

dá $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{r}{2(b+c-a)}$$

Conhecendo a, A e $b+c$, recahimos n'um problema já resolvido (nº 110).

9º *Resolver um triangulo, conhecendo um lado* a *e os raios* R *dos circulos inscripto e circumscripto.*

As fórmulas (53) $a = 2R \operatorname{sen} A$

e (45) $r = (p-a)\operatorname{tg}\frac{A}{2}$

dão respectivamente

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{2R} \quad \text{depois} \quad b+c = \frac{r}{2\operatorname{tg}\frac{A}{2}} + a$$

Conhecemos então A, a, e $b+c$, o que reduz a questão a um problema resolvido (nº 110).

10º *Resolver um triangulo, conhecendo um angulo* C, *a superficie* S *e a somma* $a+b-c=2m$

Temos (nº 105) $S = 2R^2 \operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C$

e (nº 107) $m = 4R \operatorname{sen}\frac{A}{2} \operatorname{sen}\frac{B}{2} \cos\frac{C}{2}$

Para eliminar R entre estas duas equações, dividimol-as membro a membro, depois elevada a segunda ao quadrado ado

Vem : $$\frac{m^2}{S} = 8 \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{A}{2}}{2\cos\frac{A}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sen}\frac{B}{2}}{2\cos\frac{B}{2}} \cdot \frac{\cos\frac{C}{2}}{2\operatorname{sen}\frac{C}{2}}$$

d'onde $$\operatorname{tg}\frac{A}{2} \cdot \operatorname{tg}\frac{B}{2} = \frac{m^2}{S}\operatorname{tg}\frac{C}{2}$$

por outra parte $$\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90 - \frac{C}{2}$$

Por conseguinte, podemos calcular os angulos $\frac{A}{2}$ e $\frac{B}{2}$, conhecendo a sua somma e o producto de suas tangentes.

11º *Resolver um triangulo, conhecendo o angulo* A, *e as bissectrizes interior e exterior d'esse angulo,* α *e* α'.

As bissectrizes dadas têm por expressão (nºs 101 e 102):

$$\alpha = \frac{2bc}{b+c}\cos\frac{A}{2}$$

e $$\alpha' = \frac{2bc}{b-c}\operatorname{sen}\frac{A}{2}$$

Estas duas equações permittem calcular os lados b e c, visto que ellas não contêm nenhuma outra incognita.

D'ellas tambem podem-se deduzir os angulos B e C. Com effeito, se as dividirmos membro a membro, vem

$$\frac{\alpha}{\alpha'} = \frac{b-c}{b+c}\operatorname{cotg}\frac{A}{2}$$

d'onde $$\frac{\alpha}{\alpha'}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{b-c}{b+c} = \frac{\operatorname{sen} B - \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B + \operatorname{sen} C}$$

isto é $$\frac{\alpha}{\alpha'}\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \operatorname{tg}\frac{B-C}{2}\operatorname{cotg}\frac{B+C}{2}$$

Mas temos $$\frac{B+C}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

e por conseguinte $$\operatorname{cotg}\frac{B+C}{2} = \operatorname{tg}\frac{A}{2}$$

Supprimindo este factor commum, a equação precedente se reduz a

$$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

Desde logo fica conhecida a somma e a differença dos angulos incognitos.

Fig. 65.

Solução geometrica. — Sobre as bissectrizes de um angulo igual a A, tomemos os comprimentos dados

$$AD = \alpha, \quad AD' = \alpha'.$$

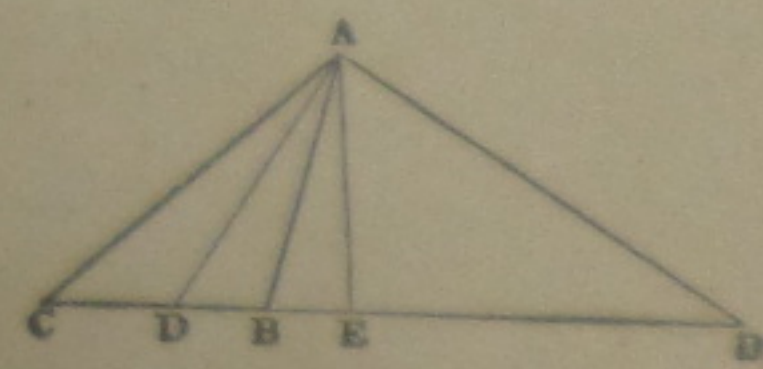
A recta DD′ determina o triangulo ABC, que responde á questão.

O triangulo rectangulo DAD′ dá

$$\alpha = \alpha' \operatorname{tg} D'$$

Ora $$D' = \frac{B+C}{2} - C = \frac{B-C}{2}$$

Logo $$\operatorname{tg}\frac{B-C}{2} = \frac{\alpha}{\alpha'}$$

fórmula acima estabelecida pelo calculo.

12° *Dá-se um triangulo ABC, cujas bissectrizes interiores encontram o circulo circumscripto em A', B', C'; unem-se dois a dois esses pontos de encontro. Resolver o triangulo A', B', C'.*

Mesma questão, os pontos A', B', C' sendo as intersecções do circulo circumscripto com as alturas do triangulo ABC.

1° Os pontos B', C', sendo os meios dos arcos AC e AB, temos, quanto ao numero de gráos

$$A' = \frac{1}{2}\text{arco}\,(AB' + AC') = \frac{C}{2} + \frac{B}{2} = 90° - \frac{A}{2}$$

Assim como $\quad B' = 90° - \frac{B}{2} \quad$ e $\quad C' = 90° - \frac{C}{2}$

Conhecendo os angulos do triangulo A', B', C', e o raio do circulo circumscripto, a questão reduz-se a um problema conhecido.

2° Temos, quanto ao numero de gráos,

$$A' = \frac{1}{2}\text{arco}\,(AB' + AC') = \frac{ABB'}{2} + \frac{ACC'}{2} = 2\left(\frac{\pi}{2} - A\right)$$

Assim $\quad A' = \pi - 2A, \quad B' = \pi - 2B, \quad C' = \pi - 2C$

e ainda fica a questão reduzida á resolução de um triangulo do qual se conhecem os angulos e o diametro do circulo circumscripto.

CAPITULO VIII

APPLICAÇÕES DIVERSAS.

---

§ I. — Quadrilatero inscriptivel.

117. Resolver um quadrilatero inscriptivel, conhecendo os quatro lados a, b, c, d.

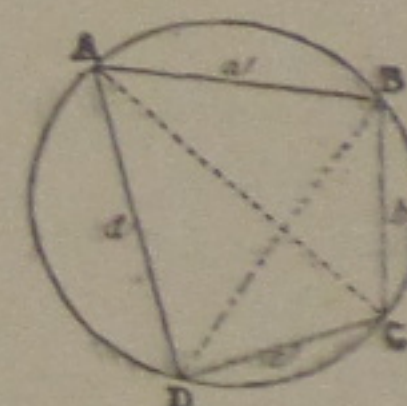
Calculo dos angulos. — Seja ABCD um quadrilatero inscriptivel tendo por lados

$$AB = a, \quad BC = b, \quad CD = c, \quad DA = d$$

Fig. 66.

A diagonal BD determina dois triangulos BDA, BDC, que dão

$$\overline{BD}^2 = a^2 + d^2 - 2ad \cos A$$

$$\overline{BD}^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos C$$

Se igualarmos entre si estas duas expressões, notando que se tem $\quad A + C = 180° \quad$ d'onde $\quad \cos C = -\cos A$

obtemos a equação

$$a^2 + d^2 - 2ad \cos A = b^2 + c^2 + 2bc \cos A$$

d'onde se tira

$$\cos A = \frac{a^2 + d^2 - b^2 - c^2}{2\,(ad + bc)} \qquad (1)$$

Esta fórmula não é logarithmica, mas d'ella se deduz

$$1 - \cos A = \frac{2ad + 2bc - a^2 - d^2 + b^2 + c^2}{2\,(ad + bc)} = \frac{(b + c)^2 - (a - d)^2}{2\,(ad + bc)}$$

isto é

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{(b + c - a + d)\,(b + c + a - d)}{2\,(ad + bc)}$$

Se assentarmos $\quad a + b + c + d = 2p$

d'onde

$$-a + b + c + d = 2\,(p - a)$$

$$a + b + c - d = 2\,(p - d) \quad \text{etc...}$$

A fórmula precedente passa a ser

$$2\,\text{sen}^2\frac{A}{2} = \frac{4\,(p - a)\,(p - d)}{2\,(ad + bc)}$$

d'onde

$$\text{sen}\,\frac{A}{2} = \sqrt{\frac{(p - a)\,(p - d)}{ad + bc}} \qquad (2)$$

Da mesma fórmula (1), podemos tambem deduzir

$$1+\cos A=\frac{2ad+2bc+a^2+d^2-b^2-c^2}{2\ ad+bc}=\frac{(a+d)^2-(b-c)^2}{2\ (ad+bc)}$$

ou

$$2\cos^2\frac{A}{2}=\frac{(a+d+b-c)\ (a+d-b+c)}{2\ (ad+bc)}=\frac{4\,(p-b)\,(p-c)}{2\,(ad+bc)}$$

d'onde

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)\ (p-c)}{ad+bc}} \qquad (63)$$

Emfim, se dividirmos membro a membro as fórmulas (62) e (63), obtemos

$$\operatorname{tg}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-d)}{(p-b)\ (p-c)}} \qquad (64)$$

Um calculo todo semelhante daría as expressões anologas de $\operatorname{sen}\frac{B}{2}$, $\cos\frac{B}{2}$ e $\operatorname{tg}\frac{B}{2}$.

Conhecendo os angulos A e B, podemos d'elles deduzir os supplementos C e D.

118. *Superficie do quadrilatero inscriptivel.* — A área S do quadrilatero ABCD é a somma das áreas dos triangulos BDA e BDC, isto é

$$S=\frac{1}{2}\ ad \operatorname{sen} A+\frac{1}{2}\ bc \operatorname{sen} C$$

ou, substituindo sen C por seu igual sen A ou $2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$

$$S=(ad+bc)\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}$$

Em vista das fórmulas (62) e (63), esta expressão torna-se

$$S=(ad+bc)\sqrt{\frac{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)}{(ad+bc)^2}}$$

ou simplesmente

$$S=\sqrt{(p-a)\ (p-b)\ (p-c)\ (p-d)} \qquad (65)$$

Observação. Se o quadrilatero é ao mesmo tempo inscripto e circumscripto, esta ultima propriedade acarreta a igualdade das duas sommas de lados oppostos.

Temos $a+c=b+d=p$

e a expressão da superficie vem a ser

$$S=\sqrt{abcd}$$

119. *Diagonaes do quadrilatero inscriptivel.* A eliminação de cos A entre as duas relações

$$\overline{BD}^2=a^2+d^2-2ad\cos A$$
$$\overline{BD}^2=b^2+c^2+2bc\cos A$$

dá

$$\frac{\overline{BD}^2-b^2-c^2}{bc}=\frac{a^2+d^2-\overline{BD}^2}{ad}$$

equação d'onde se tira

$$BD=\sqrt{\frac{(ab+cd)\ (ac+bd)}{ad+bc}} \qquad (66)$$

Obtem-se do mesmo modo

$$AC=\sqrt{\frac{(ad+bc)\ (ac+bd)}{ab+cd}} \qquad (67)$$

Theoremas de Ptolomeu. Em todo quadrilatero inscriptivel :

1º *O producto das diagonaes é igual á somma dos productos dos lados oppostos.*

2º *As diagonaes são proporcionaes ás sommas dos productos dos lados que concorrem com ellas.*

Com effeito, se multiplicarmos as fórmulas (66) e (67) e as dividirmos depois membro a membro, obtemos respectivamente

$$AC\times BD=ac+bd$$

e

$$\frac{AC}{BD}=\frac{ad+bc}{ab+cd}$$

120. *Raio do circulo circumscripto ao quadrilatero.* O raio R do circulo circumscripto ao quadrilatero ABCD, e por conseguinte ao triangulo ABC, é representado pela fórmula

$$2R=\frac{BD}{\operatorname{sen} A}=\frac{BD}{2\operatorname{sen}\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}}$$

d'onde, substituindo BD, $\operatorname{sen}\frac{A}{2}$ e $\cos\frac{A}{2}$ por seus valores em funcção dos lados,

$$R=\frac{\sqrt{(ab+cd)\ (ac+bd)\ (ad+bc)}}{4\sqrt{(p-a)\,(p-b)\,(p-c)\,(p-d)}} \qquad (68)$$

§ II. — Exercicios de Geometria plana.

1º Superficie de um parallelogramma. *A superficie de um parallelogramma é igual ao producto de dois lados consecutivos pelo seno do angulo que elles comprehendem.*

Com effeito, o parallelogramma ABCD é dividido pela diagonal BD em dois triangulos equivalentes.

Se escrevermos $AB = m$ e $AB = n$, temos por conseguinte

$$ABCD = 2.\ BAD = mn \text{ sen } A$$

2° Superficie de um quadrilatero qualquer. *A superficie de um quadrilatero é igual á metade do producto de suas diagonaes multiplicado pelo seno do angulo que ellas formam.*

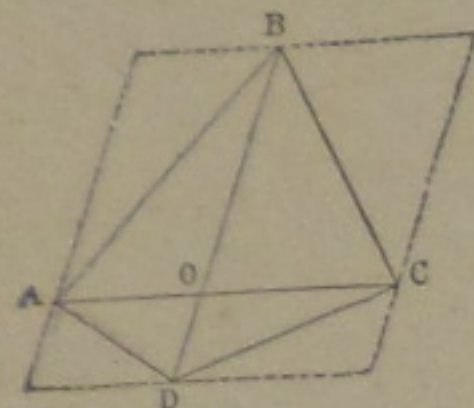



Fig. 67.

Sejam S a superficie de um quadrilatero ABCD, do qual se conhecem as diagonaes $AC = m$, $BD = n$ eo angulo O que ellas fazem entre si.

A superficie S é a somma dos quatro triangulos OAB, OBC, OCD, ODA; mas ella se obtém mais facilmente do modo seguinte.

As parallelas traçadas ás diagonaes pelos vertices oppostos formam um parallelogramma cuja superficie é dupla da superficie do quadrilatero. Ora os lados d'esse parallelogramma são iguaes ás diagonaes m, n, e um de seus angulos é igual ao angulo agudo O.

Temos pois
$$2S = mn \text{ sen } O$$

d'onde
$$S = \frac{1}{2} mn \text{ sen } O$$

3° Superficie de um polygono regular. *Calcular a superficie de um polygono regular de* n *lados, em funcção: 1° do raio* R *do circulo circumscripto; 2° do lado* c*; 3° do apothema* a.

A superficie S do polygono regular ABCD..., de centro O, é a somma de n triangulos iguaes a OAB

$$S = n.\ OAB$$

O angulo central, OAB, é igual a $\frac{2\pi}{n}$.

1° Temos
$$OAB = \frac{1}{2} OA.\ OB \text{ sen } AOB = \frac{R^2}{2} \text{ sen } \frac{2\pi}{n}$$

Logo
$$S = \frac{n}{2} R^2 \text{ sen } \frac{2\pi}{n}$$

2° Tracemos o apothema OM.

Temos
$$OM = AM \text{ cotg } AOM = \frac{c}{2} \text{ cotg } \frac{\pi}{n}$$

Assim,
$$AOB = \frac{1}{2} AB.\ OM = \frac{c^2}{4} \text{ cotg } \frac{\pi}{n}$$

Logo
$$S = \frac{n}{4} c^2 \text{ cotg } \frac{\pi}{n}$$

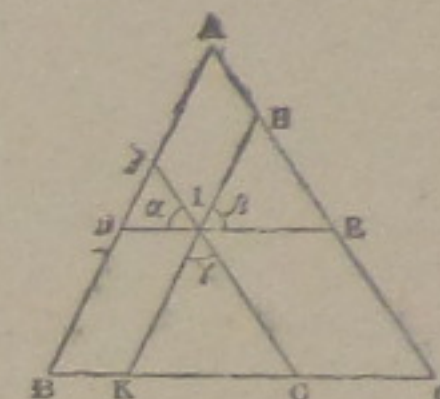
3° Temos
$$AB = 2AM = 2OM \text{ tg } AOM = 2a \text{ tg } \frac{\pi}{n}$$

Logo
$$AOB = \frac{1}{2} AB.CM = a^2 \text{ tg } \frac{\pi}{n}$$

e enfim
$$S = na^2 \text{ tg } \frac{\pi}{n}$$

4° *Se por um ponto qualquer tomado no plano de um triangulo traçam-se parallelas aos tres lados, formam-se tres parallelogrammas a tres triangulos. Demonstrar que o producto das areas dos parallelogrammas é igual a 8 vezes o dos triangulos.*

Seja o triangulo ABC

Chamemos α, β, γ os angulos dos triangulos em redor do ponto I; os angulos dos parallelogrammas lhes são respectivamente iguaes como oppostos pelo vertice.

Denominando a e a' os segmentos de DE, b e b' os segmentos de FG e c, c' os de HK, as superficies dos triangulos são:

$$\frac{1}{2} ab \text{ sen } \alpha, \quad \frac{1}{2} a'c \text{ sen } \beta \quad \text{e} \quad \frac{1}{2} b'c' \text{ sen } \gamma$$

seu producto é pois igual a $\frac{1}{8} aa'bb'cc' \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$.

As superficies dos parallelogrammas são:

$$ab \text{ sen } \alpha, \quad a'c \text{ sen } \beta \quad \text{e} \quad b'c' \text{ sen } \gamma$$

seu producto é pois $aa'\ bb'\ cc' \text{ sen } \alpha \text{ sen } \beta \text{ sen } \gamma$. É 8 vezes o producto precedente.

Fig. 68.

5° *Calcular as diagonaes de um parallelogramma, conhecendo seu angulo* α *e os lados* a *e* b *do parallelogramma* ($a > b$).

Sejam x e y as semi-diagonaes.

Temos: $x^2 + y^2 - 2xy \cos \alpha = b^2$ e $x^2 + y^2 + 2xy \cos \alpha = a^2$;

d'onde, subtrahindo e ajuntando:
$$\begin{cases} xy = \dfrac{a^2 - b^2}{4 \cos \alpha}; \\ x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{2} \end{cases}$$

temos pois de resolver um systema conhecido.

D'elle se tira:

$$(x+y)^2 = \frac{(a^2+b^2)\cos\alpha + a^2 - b^2}{2\cos\alpha} = \frac{a^2(1+\cos\alpha) - b^2(1-\cos\alpha)}{2\cos\alpha}$$

ou
$$(x+y)^2 = \frac{2a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - 2b^2 \text{ sen}^2 \frac{\alpha}{2}}{2\cos\alpha};$$

d'onde
$$x + y = \sqrt{\frac{a^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - b^2 \text{ sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}}$$

E tambem
$$x - y = \sqrt{\frac{b^2\cos^2\frac{\alpha}{2} - a^2 \text{ sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}}$$

Uma das diagonaes tem por valor a somma dos segundos membros e a outra a sua differença.

Discussão. Para que os valores de x e de y sejam reaes, é necessario que tenhamos :

$$b^2 \cos^2\frac{\alpha}{2} - a^2 \operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2} \geqq 0 \; ; \quad \text{d'onde} \quad \frac{\operatorname{sen}^2\frac{\alpha}{2}}{\cos^2\frac{\alpha}{2}} \leqq \frac{b^2}{a^2},$$

ou

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} \leqq \frac{b}{a}.$$

Se $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$, o segundo radical é nullo, e $x = y$;

alem d'isto $$\operatorname{sen}\frac{\alpha}{2} = \frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

e $$\cos\frac{\alpha}{2} = \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} \; ; \; 2x = 2y = \sqrt{a^2+b^2},$$

o parallelogramma é um rectangulo.

Se, no valor precedente, $a = b$, temos $2x = 2y = a\sqrt{2}$, o rectangulo torna-se um quadrado.

Se fizermos ao mesmo tempo $\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{b}{a}$ e $b = a$, $2x$ e $2y$ se apresentam debaixo da fórma indeterminada $\frac{0}{0}$. Esta indeterminação é real, porque α é recto, e os quatro lados são iguaes; a figura é um *losango*, as diagonaes podem pois crescer sem deixarem de ser perpendiculares e sem que os lados variem.

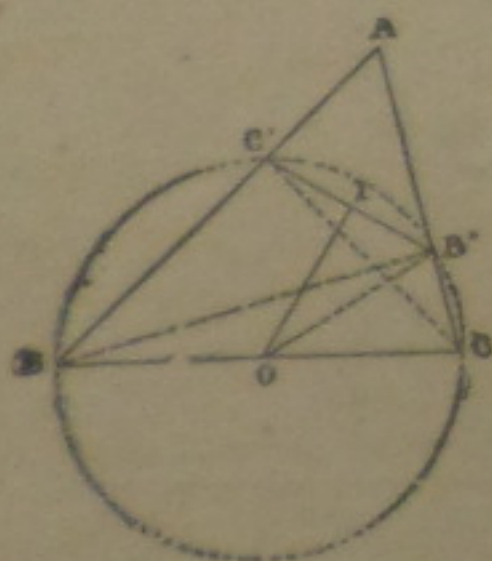



Fig. 69.

6° *Calcular a distancia do meio de um lado de um triangulo á recta que une os pés das alturas que partem de suas extremidades.*

Seja o triangulo ABC. Os pés das alturas que partem dos pontos B e C estão sobre a circumferencia que tem por diametro $BC = a$.

A distancia procurada $OI = \sqrt{\overline{OB'}^2 - \overline{BI'}^2}$

Ora, por causa do triangulo isosceles OB'C e do quadrilatero inscriptivel BCB'C, o angulo OB'C é igual a C e o angulo AB'C' é igual a B, por conseguinte OB'I é igual a A, e o triangulo rectangulo OB' I dá

$$IB' = OB' \cos OB'I = \frac{a}{2}\cos A$$

Logo $$OI = \sqrt{\frac{a^2}{4} - \frac{a^2}{4}\cos^2 A} = \frac{a}{2}\operatorname{sen} A$$

§ III. Exercicios de Geometria no espaço.

1° *Achar a razão dos volumes gerados por um parallelogramma girando successivamente em torno de seus lados a e b.*

Seja α o angulo dos lados do parallelogramma. Quando o eixo de rotação é o lado a, o volume gerado é

$$V_a = \pi a b^2 \operatorname{sen}^2 \alpha \; ;$$

quando o eixo de rotação é o lado b, o volume formado é

$$V_b = \pi a^2 b \operatorname{sen}^2 \alpha \; ;$$

Logo $$\frac{V_a}{V_b} = \frac{b}{a}$$

Os volumes estão em razão inversa dos eixos de rotação.

2° *Calcular a superficie e o volume gerados por um semi-polygono regular inscripto de um numero par de lados girando em torno do diametro do circulo circumscripto.*

Seja $2n$ o numero dos lados.

1° A superficie procurada é igual á circumferencia inscripta multiplicada pela projecção do contorno sobre o eixo. Por conseguinte

$$S = 2\pi r . \, 2R, \text{ e como } r = R\cos\frac{\pi}{n}, \; S = 4\pi R^2 \cos\frac{\pi}{n}$$

2° O volume é igual á superficie descripta multiplicada pela terça parte do raio da circumferencia inscripta. Logo

$$V = \frac{4}{3}\pi R^3 \cos^2\frac{\pi}{n}$$

Se n tende para o infinito, $\frac{\pi}{n}$ tende para zero e seu cos tende para a unidade, logo para o limite :

$$\left.\begin{aligned} S &= 4\pi R^2 \\ V &= \frac{4}{3}\pi R^3 \end{aligned}\right\} \text{ formulas relativas á esphera.}$$

3° *N'uma esphera de raio* R *traçar um plano secante* AB *tal que : 1° a superficie da calotte seja igual á superficie lateral do cóne* AOB, *2° que o volume do segmento seja igual ao do cóne.*

Seja α o semi-angulo no vertice do cóne. 1° A superficie lateral do cóne é $\pi R^2 \operatorname{sen}\alpha$, a da calotte é

$$2\pi R^2 (1 - \cos\alpha)$$

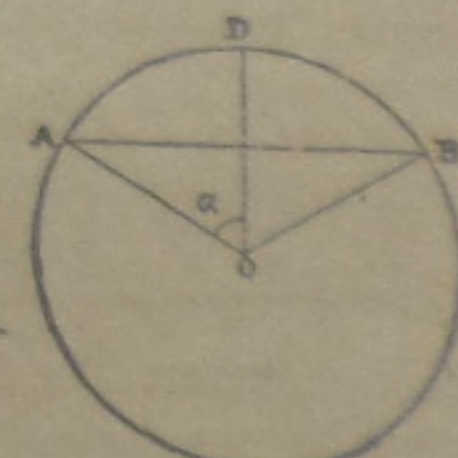
d'onde $$\operatorname{sen}\alpha = 2(1 - \cos\alpha)$$

ou $$1 - \cos^2\alpha = 4(1 - \cos\alpha)^2$$

ou $$(1 + \cos\alpha)(1 - \cos\alpha) = 4(1 - \cos\alpha)$$

Fig. 72.

Supprimindo o factor commun $1 - \cos\alpha$, correspondente á solução $\alpha = 0$, resta

$$\cos\alpha = \frac{3}{5}$$

2° O volume do cóne é $\frac{1}{3}\pi R^2 \operatorname{sen}^2\alpha \cos\alpha$

o do segmento é $\pi R^2 (1-\cos\alpha)^2 (2+\cos\alpha)$

d'onde $$\operatorname{sen}^2\alpha\cos\alpha = (1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)$$

ou $$(1-\cos\alpha)(1+\cos\alpha)\cos\alpha = (1-\cos\alpha)^2(2+\cos\alpha)$$

ou $$(1+\cos\alpha)\cos\alpha = (1-\cos\alpha)(2+\cos\alpha)$$

ou emfim $$2\cos^2\alpha + 2\cos\alpha - 2 = 0$$

$$\cos\alpha = \frac{1}{2}(-1 \pm \sqrt{5})$$

A raiz negativa devendo ser rejeitada, o valor de $\cos\alpha$ é igual á maior porção do raio dividido em média e extrema razão.

4° Theorema. — *A área da projecção de um triangulo sobre um plano é igual á superficie do triangulo multiplicada pelo coseno do angulo que o seu plano forma com o plano de projecção.*

Fig. 74.

Com effeito, supponhamos em primeiro logar que um triangulo ABC tem um dos seus lados AB parallelo ao plano de projecção; podemos então suppôr que o plano de projecção passa por AB. Do vertice C abaixemos sobre o plano uma perpendicular Cc, e de seu pé uma perpendicular cD sobre AB; se unirmos CD, esta recta será a altura do triangulo ABC, e o angulo $CDc = \alpha$ será o angulo dos dois planos.

Ora $$cD = CD\cos\alpha$$

logo $$\frac{AB \times cD}{2} = \frac{BA \times CD}{2}\cos\alpha$$

isto é $$\text{superf. } ABc = \text{superf. } ABC \times \cos\alpha$$

Supponhamos em segundo logar que o triangulo não tenha nenhum lado parallelo ao plano de projecção; podemos então suppôr que o plano passa pelo vertice A o mais baixo. Prolonguemos CB até seu encontro em I com o plano de projecção. Os triangulos AIc et AIb são as projecções dos triangulos AIC e AIB, e temos, segundo o caso precedente,

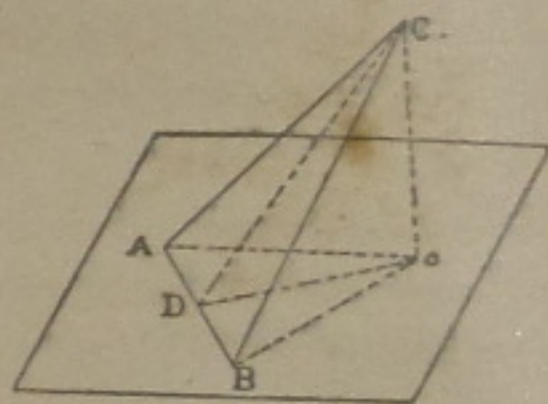
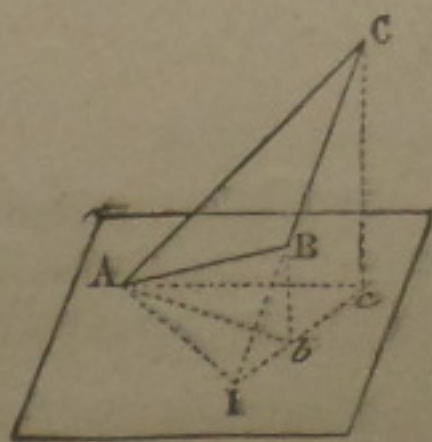
Fig. 75.

$$AIc = AIC \times \cos\alpha$$

e $$AIb = AIB \times \cos\alpha$$

logo, subtrahindo, $Abc = ABC \times \cos\alpha$

O theorema, estando demonstrado para um triangulo, se estende a um polygono qualquer, que se póde sempre decompôr em triangulos; emfim, elle se applica a uma superficie plana terminada por uma curva qualquer.

Logo, em geral : *A área da projecção de uma superficie qualquer sobre um plano é igual a essa superficie multiplicada pelo coseno do angulo que seu plano forma com o plano de projecção.*

5° Theorema. — *A somma dos quadrados das projecções de uma área plana sobre tres planos rectangulares é igual ao quadrado d'essa área.*

Com effeito, sejam S a superficie considerada e α, β, γ os angulos formados por seu plano com os planos que determinam dois a dois tr eixos rectangulares OX, OY, OZ.

A somma dos quadrados das projecções da área S sobre estes tres plano é
$$S^2\cos^2\alpha + S^2\cos^2\beta + S^2\cos^2\gamma$$
ou
$$S^2(\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma)$$

Ora, o angulo de dois planos sendo egual ao de duas rectas respectivamente perpendiculares a esses planos, se tirarmos uma recta OD perpendicular ao plano da superficie S, os tres angulos α, β, γ são respectivamente iguaes aos que forma OD com os tres eixos OX, OY, OZ.

Tudo reduz-se pois a demonstrar que *a somma dos quadrados dos cosenos dos angulos que uma recta faz com tres eixos rectangulares é igual á unidade.*

Tomemos sobre essa recta um segmento qualquer $OD = d$; as projecções d'esse segmento sobre os tres eixos

$$a = d\cos\alpha,\quad b = d\cos\beta,\quad c = d\cos\gamma$$

são as arestas de um parallelipipedo rectangulo tendo por diagonal d;

temos pois $$a^2 + b^2 + c^2 = d^2$$

isto é $$d^2\cos^2\alpha + d^2\cos^2\beta + d^2\cos\gamma = d^2$$

d'onde $$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

Logo a somma dos quadrados das projecções da área S póde escrever-se

$$S^2\cos^2\alpha + S^2\cos^2\beta + S^2\cos^2\gamma = S^2$$

Em particular, n'um tetraedro OABC tendo um triedro O tri-rectangulo, cada uma das faces sendo a projecção da área ABC sobre seu plano, temos

$$(OAB)^2 + (OBC)^2 + (OCA)^2 = (ABC)^2$$

APPENDICE

I

OUTRA DEMONSTRAÇÃO DAS FÓRMULAS QUE EXPRIMEM O SENO E O COSENO DA SOMMA OU DA DIFFERENÇA DE DOIS ARCOS.

---

1. Sen $(a+b)$ e cos $(a+b)$ em funcção dos senos e cosenos dos arcos a e b.

Trata-se de estabelecer que temos, para todo valor de cada um dos arcos a e b.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b \qquad (\alpha)$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b \qquad (\beta)$$

Primeiramente demonstraremos, com considerações geometricas, que essas fórmulas são verdadeiras n'um caso simples : depois, por meio de muitas extensões successivas, faremos vêr que ellas são completamente geraes.

Demonstração geometrica. 1° Caso. *Cada um dos arcos* a, b *é inferior a* $\frac{\pi}{2}$, *e a somma d'elles não é superior a* $\frac{\pi}{2}$. Seja A a origem dos arcos sobre o circulo trigonometrico (fig. 79); tomando sobre esse circulo, um após outro, os arcos dados AB $= a$, BC $= b$, obtemos a somma d'elles AB $= a + b$. Juntemos OA e OB, depois tiremos CI perpendicular sobre OB e CQ, BP, IL, perpendiculares sobre OA e IH perpendicular a CQ.

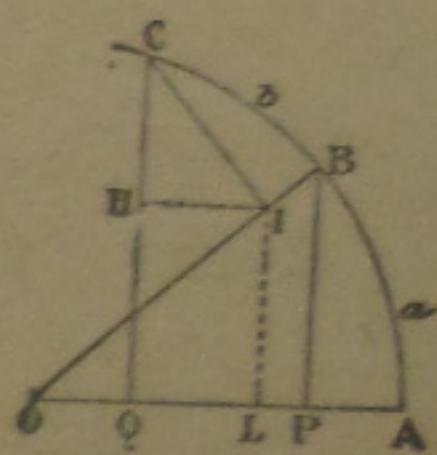



Fig. 79.

Temos :

$$\operatorname{sen}(a+b) = CQ = IL + CH \qquad (1)$$
$$\cos(a+b) = OQ = OL - LQ = OL - IH \qquad (2)$$

Tratemos de exprimir as linhas IL, CH, OL e IH *. Os triangulos CIH e OBP, semelhantes como tendo os lados perpendiculares, dão :

$$\frac{CH}{OP} = \frac{IH}{BP} = \frac{CI}{OB \text{ ou } 1};$$

d'onde se tira :

$$CH = OP \times CI = \cos a \operatorname{sen} b$$

e

$$IH = BP \times CI = \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Assim tambem os triangulos semelhantes OIL e OBP dão

$$\frac{IL}{BP} = \frac{OL}{OP} = \frac{OI}{OB \text{ ou } 1}$$

d'isso se;

$$IL = BP \times OI = \operatorname{sen} a \cos b$$

e

$$OL = OP \times OI = \cos a \cos b$$

substituindo esses valores em (1) e (2), vem :

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \operatorname{sen} b \cos a$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

Generalisação. 2° Caso. *Cada um dos arcos* **a, b** *é inferior a* $\frac{\pi}{2}$, *mas a sua somma é superior a* $\frac{\pi}{2}$.

Consideremos os complementos dos arcos a e b.

$$a' = \frac{\pi}{2} - a \qquad b' = \frac{\pi}{1} - b. \qquad (3)$$

a sua somma $a' + b' = \pi - (a+b)$ sendo inferior a $\frac{\pi}{2}$, póde-se, segundo o 1° caso, applicar a esses arcos a', b', as fórmulas (α), (β) ; o que dá

$$\operatorname{sen}(a'+b') = \operatorname{sen} a' \cos b' + \cos a' \operatorname{sen} b' \qquad (4)$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b' \qquad (5)$$

Substituamos a', b' por seus valores (3) ; notemos que se dois arcos são complementares, o seno de um é igual ao coseno do outro ; emfim, lembremo-nos que dois arcos supplementares têm senos iguaes e cosenos iguaes e de signaes contrarios. As fórmulas (4) e (5) tornam-se, mudando todos os signaes na ultima.

$$\operatorname{sen}(a+b) = \operatorname{sen} a \cos b + \cos a \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \operatorname{sen} a \operatorname{sen} b$$

são as fórmulas (α) e (β) applicadas a dois arcos quaesquer comprehendidos entre 0° e $\frac{\pi}{2}$.

3° Caso. *Se as fórmulas* (α), (β) *são applicaveis a dois arcos dados, ellas não deixam de sel-o quando se ajunta* $\frac{\pi}{2}$ *a um d'esses arcos.* Por exemplo, se as fórmulas são verdadeiras para os arcos a' e b ellas o são tambem para os arcos $a = a' + \frac{\pi}{2}$ e b.

Com effeito, temos por hypothese

$$\operatorname{sen}(a'+b) = \operatorname{sen} a' \cos b + \cos a' \operatorname{sen} b$$
$$\cos(a'+b) = \cos a' \cos b - \operatorname{sen} a' \operatorname{sen} b$$

Substituamos a' por seu valor $a - \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\text{sen}\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\cos b + \cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\text{sen } b$$
$$\cos\left(a+b-\frac{\pi}{2}\right) = \cos\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\cos b - \text{sen}\left(a-\frac{\pi}{2}\right)\text{sen } b$$

isto é, em virtude do nº 16.

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$
$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$

4º Caso. *As fórmulas* (α), (β) *são verdadeiras para dois arcos positivos quaesquer.*

Sejam dois arcos positivos a e b. Dividindo cada um d'esses arcos por $\frac{\pi}{2}$, obtemos quocientes inteiros m, n e restos inferiores a $\frac{\pi}{2}$, a' e b' o que permitte escrever-se

$$a = m\frac{\pi}{2} + a' \qquad b = n\frac{\pi}{2} + b'$$

As fórmulas (α), (β) são applicaveis aos arcos a', b' em virtude do segundo caso; temos

$$\text{sen}(a'+b') = \text{sen } a' \cos b' + \cos a' \text{ sen } b' \qquad (6)$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \text{sen } a' \text{ seu } b' \qquad (7)$$

Ora, segundo o 3º caso, estas fórmulas subsistem quando se junta successivamente a a' m vezes $\frac{\pi}{2}$, e a b' n vezes $\frac{\pi}{2}$. Essas operações successivas dão finalmente.

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

são as fórmulas (α), (β) applicadas a dois arcos positivos quaesquer.

5º Caso. *As fórmulas* (α), (β) *são verdadeiras para dois arcos quaesquer positivos ou negativos.* Sejam dois arcos a, b, dos quaes um pelo menos é negativo. Póde-se sempre assignar um numero inteiro positivo k, assaz grande para que os arcos

$$a + 2k\pi = a' \quad \text{e} \quad b + 2k\pi = b'$$

sejam ambos positivos.

Segundo o 4º caso, esses arcos a', b' satisfazem ás duas fórmulas

$$\text{sen}(a'+b') = \text{sen } a' \cos b' + \cos a' \text{ sen } b' \qquad (8)$$
$$\cos(a'+b') = \cos a' \cos b' - \text{sen } a' \text{ sen } b' \qquad (9)$$

Ora, se substituirmos a' por $a + 2k\pi$, b' por $b + 2k\pi$, e se tirarmos depois $2k\pi$ a cada um d'esses arcos, o que não altera nenhuma das suas linhas trigonometricas (8) e (9) tornam-se finalmente

$$\text{sen}(a+b) = \text{sen } a \cos b + \cos a \text{ sen } b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

são as fórmulas (α) e (β) applicadas a dois arcos quaesquer.

Logo as fórmulas são completamente geraes.

II. Sen $(a-b)$ e cos $(a-b)$ em funcção dos senos e cosenos dos arcos a e b.

Se substituirmos b por $-b$ nas fórmulas (α) e (β), obtemos as fórmulas igualmente geraes.

$$\text{sen}(a-b) = \text{sen } a \cos b - \cos a \text{ sen } b \qquad (\gamma)$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \text{sen } a \text{ sen } b \qquad (\delta)$$

III. Observação. As fórmulas (α), (β), que comprehendem as fórmulas (γ), (δ), entram ellas mesmas uma na outra.

Com effeito, se substituirmos a por $a + \frac{\pi}{2}$, a primeira fica sendo

$$\text{sen}\left(a+b+\frac{\pi}{2}\right) = \text{sen}\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\cos b + \cos\left(a+\frac{\pi}{2}\right)\text{sen } b$$

ou, tendo em conta o nº 16,

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{ sen } b$$

Logo, na realidade, as quatro fórmulas (α), (β), (γ), (δ) se reduzem a uma só. Bastaria estabelecer uma d'ellas em sua generalidade para poder depois deduzir as outras tres.

II

REPRESENTAÇÃO TRIGONOMETRICA DOS EXPRESSÕES IMAGINARIAS FORMULA DE MOIVRE

Sabe-se pela algebra que se denomina *expressão imaginaria* ou simplesmente *imaginario* toda a expressão da fórma

$$a \pm \sqrt{-b^2}$$

em que $(-b^2)$ é essencialmente negativo; e a e b são reaes, positivos, nullos ou negativos.

Em virtude da generalisação algebrica, applicão-se aos imaginarios as regras demonstradas para as quantidades reaes.

Portanto, podemos escrever :

$$a \pm \sqrt{-b^2} = a \pm b\sqrt{-1},$$

d'onde, representando-se com Gauss $\sqrt{-1}$ pela letra i, vem :

$$a \pm b\,i \qquad (1)$$

como symbolo das expressões imaginarias.

Si na expressão (1) suppuzermos $b = 0$ ella se reduz a a ; portanto, os imaginarios comprehendem como caso particular as quantidades reaes.

As denominações real e imaginaria forão infelizes, pois suggerem uma opposição que não existe. O imaginario, no verdadeiro ponto de vista scientifico, tem o mesmo sentido que a fracção, o negativo, o irracional, e não qualquer outro sentido especial e extranho. Todas essas expressões não passam de meros symbolos, indicando resultados de operações sobre numeros inteiros positivos, quando taes resultados não são são numeros inteiros positivos.

A razão pela qual denomínou-se imaginario a expressão algebrica onde entra o symbolo i, foi a difficuldade de descobrir alguma realidade *extra-algebrica* que o representasse.

Pela algebra sabe-se :

1° Que dous imaginarios que differem sómente pelo signal do coefficiente de i, são chamados conjugados, taes são : $a + bi$ e $a - bi$.

2° Que se denomina *modulo* de um imaginario a raiz quadrada da somma dos quadrados da parte real e do coefficiento de i; essa raiz sendo sempre tomada positiva, assim o modulo de

$$3 - 4\,i \text{ é } + \sqrt{3^2 + 4^2} = + 5$$

3° dous imaginarios conjugados têm o mesmo modulo.

Postulatum 1° *A equação* $a + bi = 0$ *se decompõe em*

$$a = 0 \text{ e } b = 0$$

Com effeito, não se pode operar nenhuma reducção entre a expressão real a e o imaginario bi.

Postulatum 2° *A equação* $a + bi = a' + b'i$ se decompõe em

$$a = a' \text{ e } b = b'$$

Theorema 1° *Toda o imaginario pode assumir a fórma*

$$\rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

ρ designando o modulo e φ um angulo chamado argumento.

Para que a equação de condição

$$a + bi = \rho\,(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

exista sempre, é necessario que sempre se tenha (Postulatum 2°)

$$\rho\cos\varphi = a \text{ e } \rho\operatorname{sen}\varphi = b$$

Esse systema é sempre possivel e determinado. Com effeito, para

obter-se o valor de ρ, elevão-se ao quadrado os membros de cada equação e depois se as sommam ordenadamente; vem :

$$\rho^2\,(\operatorname{sen}^2\varphi + \cos\varphi) = a^2 + b^2$$

e, por ser

$$\operatorname{sen}^2\varphi + \cos^2\varphi = 1,$$

$$\rho^2 = a^2 + b^2$$

d'onde :

$$\rho = \sqrt{a^2 + b^2}$$

que, considerado com o signal positivo, o que é sempre possivel, é o *modulo*.

Para obtenção do angulo φ tirão-se do systema supra as duas relações :

$$\cos\varphi = \frac{a}{\rho}$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{b}{\rho}$$

Essas duas relações são satisfeitas por um mesmo angulo, pois a somma dos quadrados dos segundos membros é igual á unidade; na verdade :

$$\frac{a^2}{\rho^2} + \frac{b^2}{\rho^2} = \frac{a^2 + b^2}{\rho^2} = \frac{\rho^2}{\rho^2} = 1$$

Portanto, o angulo φ é determinado pelo seo seno e seo coseno.

Exercicio : Seja o imaginario

$$3 + 4\,i;$$

Tem-se

$$\rho = \sqrt{9 + 16} = + 5$$

e

$$\cos\varphi = \frac{3}{5} = 0{,}6$$

$$\operatorname{sen}\varphi = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

d'onde

$$\varphi = 36°\,50'$$

E portanto

$$3 + 4\,i = 5\,(\cos 36°\,50' + i \operatorname{sen} 36°\,50')$$

Theorema 2°. *O producto de dous imaginarios é um imaginario cujo modulo e argumento são respectivamente o producto dos modulos e a somma dos argumentos dos factores.*

Sejão os dous imaginarios

$$\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)$$

e

$$\rho'(\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi);$$

multiplicando, vem :

$$\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi) \times \rho'\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi) =$$

$$= \rho\rho'\,[\cos\varphi\cos\psi + i \operatorname{sen}\psi\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi\cos\psi + i \operatorname{sen}\varphi \operatorname{sen}\psi]$$
$$= \rho\rho'\,[(\cos\varphi\cos\psi - \operatorname{sen}\varphi\operatorname{sen}\psi) + i(\operatorname{sen}\psi\cos\varphi + \operatorname{sen}\varphi\cos\psi)]$$
$$= \rho\rho'\,[\cos(\varphi+\psi) + i \operatorname{sen}(\varphi+\psi)];$$

o que demonstra o theorema.

Corollario 1°. O modulo e o argumento do producto de um numero qualquer de imaginarios são iguaes respectivamente ao producto dos modulos e á somma dos argumentos dos factores.

Com effeito, para multiplicar os dous primeiros factores, multiplicam-se seos modulos e sommam-se seos argumentos. Para multiplicar esse producto pelo terceiro factor, deve-se multiplicar seo modulo pelo do terceiro factor, e somma-se a seo argumento o do terceiro factor; e assim por diante.

Corollario 2°. Para elevar um imaginario a uma potencia inteira e positiva de grau m, é necessario elevar o modulo á potencia m e multiplicar o argumento por m.

E'uma consequencia immediata do corollario precedente, suppondo-se iguaes todos os factores alli considerados.

Formula da Moivre. Do corollario 2° deduz-se :

$$[\rho(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)]^m = \rho^m(\cos m\varphi + i \operatorname{sem} n\varphi).$$

Fazendo $\rho = 1$, o que equivale a suppor o modulo igual a 1, vem

$$(\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi)^m = \cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi$$

Essa igualdade notavel chama-se a *formula de Moivre*.

III

RESOLUÇÃO TRIGONOMETRICA DA EQUAÇÃO BINOMIA

A equação da fórma

$$a\,x^m = b$$

é denominada em algebra *equação binomia*.

Fazendo $x^m = \frac{b}{a} z^m$, ella toma a fórma

$$(1) \qquad z^m = 1,$$

que vamos resolver de modo élegante com auxilio da *formula de Moivre*.

Toda a expressão imaginaria cuja potencia *m é 1*, ou tem para modulo a unidade, tem tambem para modulo a unidade.

Si a equação (1) admitte uma raiz imaginaria, essa raiz é da fórma

$$\cos\varphi + i \operatorname{sen}\varphi$$

Para que essa expressão seja effectivamente raiz, é necessario e sufficiente que se tenha, de accordo com a *formula de Moivre* :

$$\cos m\varphi + i \operatorname{sen} m\varphi = 1,$$

d'onde

$$\cos m\varphi = 1\,; \text{ e } \operatorname{sen} m\varphi = 0$$

ou

$$m\varphi = 2k\pi \quad \text{e } \varphi = \frac{2k\pi}{m},$$

sendo k um inteiro arbitrario.

Por consequencia a equação (1) é satisfeitá por todos os valores de z comprehendidos na formula

$$(2) \qquad z = \cos\frac{2k\pi}{m} + i \operatorname{sen}\frac{2k\pi}{m}.$$

Para que dous valores de k' e k'' de k correspondam a dous valores de z, é necessario e sufficiente que a differença dos argumentos $\frac{2k'\pi}{m}$, $\frac{2k''\pi}{m}$ seja um multiplo de 2π, ou, em outros termos, que a differença $k' - k''$ seja um multiplo de m.

A formula (2) dá, e sómente dá, m valores distinctos para z; os quaes são obtidos, attribuindo-se a k, m valores inteiros consecutivos quaesquer entre $-\infty$ e $+\infty$, por exemplo :

$$0,\ 1,\ 2\ldots(m-1).$$

Exercicio. Seja a equação binomia

$$z^3 - 1 = 0$$

Attribuindo-se a k na formula (2) os valores

$$0,\ 1,\ 2$$

vem :

$$z_0 = 1$$

$$z_1 = \cos\frac{2\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{2\pi}{3} = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$z_2 = \cos\frac{4\pi}{3} + i \operatorname{sen}\frac{4\pi}{3} = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}$$

Pode-se notar que a terceira raiz z_3 é o quadrado da segunda z_2.

Fazendo-se então :

$$j = \frac{-1 + i\sqrt{3}}{2}$$

as trez raizes da equação $z^3 - 1 = 0$ serão representadas por $1, j$ e j^2.

EXERCICIOS E PROBLEMAS

Exercicios sobre os Capitulos I. e II

1. Reduzir ao primeiro quadrante as linhas dos arcos seguintes :

1° sen 105° 45′ 4″
2° sen 124° 3′ 12″
3° sen 223° 32′ 21″
4° sen 1 413° 18′ 43″

2. Dado sen $a = \frac{4}{5}$, achar as outras linhas trigonometricas do arco a.

3. Mesma questão, sabendo que cosec $a = \sqrt{3}$.

4. Achar o seno e o coseno de um arco cuja tangente é $\frac{3}{4}$.

5. Achar as linhas trigonometricas dos arcos de 120° e de 105°.

6. Achar todos os angulos comprehendidos entre 0 e 900° para os quaes temos : tg $a = 1$.

7. Qual é o valor da expressão :

$$x = \frac{\text{sen } 60° - \text{sen } 30°}{\text{sen } 60° + \text{sen } 30°}$$

8. Dados sen $(A - B) = \frac{1}{2}$ e cos $(A + B) = \frac{1}{2}$, achar A e B.

9. Calcular tg $(a + b)$, sabendo que tg $a = 1$ e tg $b = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

10. Sen $a = \frac{1}{4}$, cos $b = \frac{3}{5}$; calcular sen $(a \pm b)$ e cos $(a \pm b)$.

11. Dado sen $a = \frac{4}{5}$, achar sen $2a$, cos $2a$ e tg $2a$.

12. Calcular sen $3a$ em funcção de sen a e cos $3a$ em funcção de cos a. Verificar para $a = 60°$.

13. Sabendo que $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, calcular sen 15°, cos 15° e tg 15°.

14. Achar sen 9° e cos 9°.

15. Sabendo que $\operatorname{tg} 30° = \frac{1}{\sqrt{3}}$, achar tg 15° depois tg 7° 30′.

16. Dada $\operatorname{tg} a = -\frac{24}{7}$, calcular $\operatorname{tg}\frac{a}{2}$ e d'ahi deduzir $\operatorname{sen}\frac{a}{2}$ e $\cos\frac{a}{2}$.

17. $\cos a = 0{,}7$; calcular $\operatorname{tg}\frac{1}{2}a$.

Tornar calculaveis por logarithmos as expressões.

18. sen 34° 24′ 12″ + sen 12° 14′ 28″
19. sen 25° 36′ 14″ + sen 16° 3′ 46″
20. sen 32° 8′ 17″ — sen 9° 10′ 25″
21. cos 45° 17′ 41″ + cos 27° 56′ 4″
22. cos 6° 12′ 5″ — cos 62° 40′ 32′
23. cos 20° 0′ 58″ — sen 35° 53′ 8″
24. tg 18° 24′ 9″ + tg 10° 0′ 42″
25. cotg 37° 38′ 49″ — cotg 76° 1′ 59″
26. $\dfrac{\text{sen } 63° 34′ 12″ + \text{sen } 38° 7′ 45″}{\text{sen } 63° 34′ 12″ - \text{sen } 38° 7′ 45″}$
27. $\dfrac{\text{sen } 98° 6′ 35″ - \text{sen } 25° 32′ 8″}{\text{sen } 98° 6′ 35″ - \text{sen } 25° 32′ 8″}$

Tornar calculaveis por logarithmos as expressões.

28. 1 + sen 20° 32′ 44″
29. 1 — sen 30° 45′ 17″
30. 1 + cos 18° 4′ 50″
31. 1 — cos 64° 56′ 48″
32. 1 + tg 43° 9′ 6″
33. 1 — tg 7° 5′ 8″
34. 1 — cotg 76° 31′ 26″
35. 1 + cotg 52° 15′ 24″
36. $\dfrac{1 - \text{tg } 15° 24′ 35″}{1 + \text{tg } 15° 24′ 35″}$
37. $\dfrac{1 + \text{tg } 27° 8′ 15″}{1 - \text{tg } 27° 8′ 15″}$

Exercicios sobre o Capitulo III.

Achar os logarithmos de :

38. sen 7° 24′ 20″
39. cos 24° 15′ 40″
40. sen 15° 32′ 30″
41. cos 59° 24′ 50″
42. sen 28° 45′ 23″
43. cos 41° 33′ 59″
44. sen 36° 52′ 32″
45. cos 57° 42′ 2″
46. sen 48° 0′ 41″
47. cos 68° 51′ 12″
48. sen 52° 12′ 54″,2
49. cos 2° 17′ 35″,7
50. sen 64° 25′ 9″,8
51. cos 18° 26′ 42″,9
52. sen 75° 38′ 12″,6
53. cos 72° 0′ 2″,3
54. sen 88° 48′ 25″,4
55. cos 87° 8′ 23″,5
56. sen 0° 12′ 7″,3
57. cos 89° 0′ 45″,8

Achar os logarithmos de :

58. tg 10° 22′ 10″
59. cotg 25° 12′ 30″
60. tg 21° 45′ 20″
61. cotg 36° 21′ 40″
62. tg 32° 16′ 35″
63. cotg 47° 39′ 28″
64. tg 43° 0′ 46″
65. cotg 58° 42′ 17″
66. tg 54° 2[illegible]′ 57″
67. cotg 69° 0′ 9″
68. tg 65° 33′ 8″,1
69. cotg 80° 53′ 13″,2
70. tg 76° 38′ 12″,3
71. cotg 6° 16′ 22″,4
72. tg 87° 45′ 25″,5
73. cotg 19° 25′ 33″,6
74. tg 2° 4′ 34″,7
75. cotg 21° 43′ 42″.8
76. tg 0° 15′ 48″,9
77. cotg 0° 0′ 56″,1

Achar os logarithmos de :

78. sen 164° 27′ 30″
79. cos 120° 35′ 10″
80. sen 208° 45′ 23″
81. cos 221° 33′ 59″

Achar os angulos correspondentes a :

82. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}408\,8894$
83. $\log \cos x = \overline{1}{,}884\,9065$
84. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}775\,6935$
85. $\log \cos x = \overline{1}{,}714\,9428$
86. $\log \operatorname{sen} x = \overline{2}{,}765\,4321$
87. $\log \cos x = \overline{1}{,}998\,8776$
88. $\log \operatorname{sen} x - \overline{2}{,}912\,3456$
89. $\log \cos x = \overline{1}{,}983\,4560$
90. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}357\,9468$
91. $\log \cos x = \overline{1}{,}944\,3325$
92. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}567\,1248$
93. $\log \cos x = \overline{1}{,}876\,5432$
94. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}753\,1864$
95. $\log \cos x = 1{,}789\,1234$
96. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}942\,6715$
97. $\log \cos x = \overline{1}{,}654\,3245$
98. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}976\,0044$
99. $\log \cos x = \overline{2}{,}753\,1789$
100. $\log \operatorname{sen} x = \overline{1}{,}999\,1357$
101. $\log \cos x = \overline{3}{,}890\,0216$

Achar os angulos correspondentes a :

102. $\log \operatorname{tg} x = \overline{1}{,}882\,0134$
103. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{1}{,}059\,2624$
104. $\log \operatorname{tg} x = 0{,}360\,3752$
105. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{1}{,}817\,0712$
106. $\log \operatorname{tg} x = \overline{1}{,}321\,0789$
107. $\log \operatorname{cotg} x = 0{,}357\,9124$
108. $\log \operatorname{tg} x = \overline{1}{,}654\,1245$
109. $\log \operatorname{cotg} x = 0{,}125\,2468$
110. $\log \operatorname{tg} x = \overline{1}{,}864\,2013$
111. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{0}{,}048\,1789$
112. $\log \operatorname{tg} x = \overline{1}{,}995\,0045$
113. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{1}{,}975\,0072$
114. $\log \operatorname{tg} x = 0{,}123\,4568$
115. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{1}{,}678\,5401$
116. $\log \operatorname{tg} x = 0{,}345\,6789$
117. $\log \operatorname{cotg} x = \overline{1}{,}234\,5625$
118. $\log \operatorname{tg} x = 1{,}789\,0012$
119. $\log \operatorname{cotg} x = 3{,}890\,0036$
120. $\log \operatorname{tg} x = \overline{3}{,}850\,1854$
121. $\log \operatorname{cotg} x - 2{,}975\,3124$

Avaliar os menores arcos positivos que satisfaçam ás equações:

122.	$\mathrm{sen}\, x = \frac{3}{5}$	126.	$\sec x = \frac{7}{3}$
123.	$\mathrm{tg}\, x = 3$	127.	$\mathrm{tg}\, x - \frac{17}{9}$
124.	$\cos x = 0,7$	128.	$\mathrm{cotg}\, x = -\frac{5}{7}$
125.	$\mathrm{cotg}\, x = \frac{2}{3}$	129.	$\mathrm{cosec}\, x = -\frac{4}{3}$

Avaliar os menores arcos positivos que satisfaçam ás equações

130. $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{sen}\, 12^\circ 24' 48'' + \cos 12^\circ 24' 48''$
131. $\mathrm{tg}\, x = \mathrm{tg}\, 63^\circ 15' 16'' + \mathrm{cotg}\, 63^\circ 15' 16''$

Exercicios sobre o Capitulo IV.

Equações a uma incognita.

132. Achar o menor angulo positivo que satisfaça á equação : $\mathrm{tg}\, 2x = 3\, \mathrm{tg}\, x$.

133. Resolver a equação : $\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, x = 4$.

134. Resolver a equação : $\mathrm{tg}\, x + ab\, \mathrm{cotg}\, x = a + b$.

135. Resolver a equação : $\mathrm{tg}\, x - \mathrm{cotg}\, x = 1$.

136. Resolver a equação : $\mathrm{sen}\, 5x = \mathrm{sen}\, 7x$.

137. Resolver a equação : $\mathrm{sen}\, 4x + \mathrm{sen}\, x = 0$.

138. Achar os valores de x comprehendidos entre 0 e $\frac{\pi}{2}$ satisfazendo á equação : $\mathrm{sen}\, 2x = \cos(x + h)$.

139. Achar os valores de x que satisfazem á equação : $\mathrm{sen}\,(x + a) = \cos(3x + b)$.

140. Achar os valores de x que satisfazem á equação : $\mathrm{tg}\, 2x + \mathrm{cotg}\, x = 8 \cos^2 x$.

141. Resolver a equação : $\mathrm{sen}\, x + \mathrm{sen}\, 2x + \mathrm{sen}\, 3x = 0$.

142. Achar os valores de x comprehendidos entre 0 e 2π, que satisfaçam á equação : $\mathrm{sen}\, 2x = \cos 3x$.

143. Resolver a equação : $2\, \mathrm{sen}\, x = \mathrm{sen}\,(45^\circ - x.)$

144. Resolver a equação : $2\, \mathrm{sen}\, x + 3 \cos x = 3$.

145. Resolver a equação : $\cos x = \frac{2\, \mathrm{tg}\, x}{1 + \mathrm{tg}^2 x}$

146. Calcular o angulo x determinado pela relação seguinte :

$$\mathrm{sen}\,(x + 45^\circ)\, \mathrm{sen}\,(x + 75^\circ) = \mathrm{sen}\, 82^\circ.$$

147. Qual é o arco cujo coseno é igual á corda?

148. Determinar um angulo tal que a somma das suas seis linhas trigonometricas seja igual á uma quantidade dada m.

149. Resolver as equações :

1° $\cos x + \sqrt{3}\, \mathrm{sen}\, x = 1$.
2° $\sqrt{3}\, \mathrm{sen}\, x + \cos x = 2$.
3° $\mathrm{sen}\, x + \sqrt{3} \cos x = \sqrt{2}$.

150. Resolver : $\mathrm{sen}\,(x - a) = \mathrm{sen}\, x - \mathrm{sen}\, a$

151. Resolver a equação : $\mathrm{tg}^3 x - \mathrm{cotg}^3 x = m^3 - 3m$.

152. Resolver a equação : $\mathrm{arco\ sen}\, x + \mathrm{arco\ sen}\, x\sqrt{3} = \frac{\pi}{2}$.

Equações a muitas incognitas.

153. Resolver o systema das duas equações ;

$$\mathrm{sen}\, x = \cos 2y$$
$$\mathrm{sen}\, 2x = \cos y$$

154. Achar dois angulos conhecendo a somma a de seus senos e a somma b de seus cosenos.

155. Resolver as equações simultaneas :

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{cotg}\, y = a$$
$$\mathrm{cotg}\, x + \mathrm{tg}\, y = b$$

156. Achar os valores de $\mathrm{tg}\, x$ e de $\mathrm{tg}\, y$ que satisfaçam ás equações :

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = 1$$
$$\mathrm{tg}\,(x + y) = \frac{4}{3}$$

e deduzir d'elles os valores correspondentes do seno e do coseno

157. Calcular dois angulos x e y taes que se tenha :

$$\mathrm{tg}\, x + \mathrm{tg}\, y = a$$
$$\mathrm{tg}\,(x + y) = b$$

Discussão.

158. Resolver o systema das duas equações :

$$\mathrm{sen}\, x\, \mathrm{sen}\, y = a$$
$$\cos x \cos y = b$$

achar, especialmente, todos os valores de x e de y que satisfaçam a essas equações quando se tem : $a = \frac{1}{4}$, $b = \frac{3}{4}$.

159. Resolver as duas equações :

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} \alpha$$
$$\cos x + \cos y = 1 + \cos \alpha$$

160. Resolver o systema das duas equações :

$$2(\operatorname{sen} 2x + \operatorname{sen} 2y) = 1 = 2 \operatorname{sen}(x + y)$$

161. Eliminar x e y entre as tres equações :

$$\operatorname{sen} x + \operatorname{sen} y = a$$
$$\cos x + \cos y = b$$
$$\cos(x - y) = c$$

162. Eliminar x entre as equações :

$$(a - b \operatorname{sen}(x + \alpha) = (a + b) \operatorname{sen}(x - \alpha)$$
$$a \operatorname{tg} \frac{x}{2} - b \operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = c$$

163. Achar todos os valores de sen x e de sen y que verificam as equações :

$$\operatorname{sen} y = k \operatorname{sen} x$$
$$2 \cos x + \cos y = 1$$

que valores deve-se dar a k para que seja possivel o problema ?

164. Calcular dois angulos, conhecendo a sua somma ou a sua differença d'elles, e a somma, o producto ou o quociente de seus senos.

165. Calcular dois angulos, conhecendo a sua somma e a sua differença e a somma, o producto ou o quociente de suas tangentes.

166. Dividir um angulo a em duas partes taes que a razão de seus senos, ou a de seus cosenos, ou a de suas tangentes seja igual a um numero dado m.

167. Dividir o arco de 30° em duas partes taes que o seno da primeira seja o triplo do seno da segunda.

168. Dividir o angulo de 45° em duas partes taes que suas tangentes estejam na razão de 5 para 6.

169. Calcular os valóres de x e de y que satisfazem ás equações :

$$x + y = a$$
$$\operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y = b$$

170. Calcular os valores de x e de y qne satisfazem ás equações :

$$x + y = a$$
$$\operatorname{sen}^2 x + \operatorname{sen}^2 y = 1 - \cos a$$

Exercicios sobre o Capitulo V.

Triangulos rectangulos.

Resolver os triangulos rectangulos cujos dados seguem :

1° Caso.

171. $a = 230^m$, $B = 38°$

172. $a = 578^m,25$, $B = 38° 51' 23''$

2° Caso.

173. $b = 102^m,40$, $B = 55°$

174. $b = 5734^m,25$, $B = 37° 29' 12''$

3° Caso.

175. $a = 117^m,80$, $b = 48^m$

176. $a = 5\,678^m,76$, $b = 3\,456^m,48$

4° Caso.

177. $b = 122^m,40$, $c = 130^m$

178. $b = 52^m,34$, $c = 28^m,80$

179. Resolver um triangulo rectangulo, conhecendo

$$c = 102^m \quad \text{e} \quad \frac{b}{a} = 0,6$$

180. Qual é a altura de uma torre que dá 96 m. de sombra, quando o sol está na altura de 52° 30′ acima do horizonte ?

181. Qual é o comprimento da sombra projectada por uma arvore de 15^m de altura, quando o sol está na altura de 37° 30′ acima do horizonte ?

182. Determinar a altura do sol quando a sombra de um estylo vertical exposto ao sol é igual a 2 vezes $\frac{1}{2}$ a altura do estylo.

183. Qual é a altura do sol quando a sombra de um objecto vertical é igual a uma vez $\frac{1}{2}$ a sua altura ?

184. Achar o comprimento de uma recta que faz um angulo de 22° 40′ com sua projecção, cujo comprimento é $16^m,64$.

185. Um rectangulo tem $120^m,40$ de base e $70^m,18$ de altura ; quaes são os angulos formados pela diagonal com os lados ?

186. A diagonal de um rectangulo tem $68^m,42$, o angulo que ella forma com a base tem 24° 18′. Pergunta-se qual é a superficie do rectangulo.

187. Uma corda subtendendo um arco de 82° está a 20^m do centro ; qual é o comprimento d'esta corda ?

188. N'um circulo de $8^m,35$ de raio, qual é o comprimento da corda de um arco de 17° 8′ ?

Triangulos quaesquer.

Resolver os triangulos cujos dados seguem :

1° Caso.

189. $\begin{cases} A = 32^\circ\,57' \\ B = 123^\circ \\ a = 117^\circ\,80 \end{cases}$ | 190. $\begin{cases} A = 57^\circ\,32'\,7'',6 \\ B = 73^\circ\,42'\,50'' \\ a = 25\,432^m,46 \end{cases}$

2° Caso.

191. $\begin{cases} a = 167^m \\ b = 145^m \\ C = 54^\circ \end{cases}$ | 192. $\begin{cases} b = 61\,686^m,54 \\ c = 51\,956^m,90 \\ A = 24^\circ\,26'\,56'' \end{cases}$

3° Caso.

193. $\begin{cases} a = 75^m \\ b = 92^m \\ c = 107^m \end{cases}$ | 194. $\begin{cases} a = 456^m,48 \\ b = 518^m,50 \\ c = 592^m,30 \end{cases}$

4° Caso

195. $\begin{cases} a = 105^m \\ b = 110^m \\ A = 58^\circ \end{cases}$ | 196. $\begin{cases} b = 53^m,60 \\ c = 35^m,20 \\ B = 71^\circ 15 \end{cases}$

197. O angulo de elevação do vertice de uma torre vertical é de $43^\circ 15'$ a 72^m da torre; estando o olho do observador a 1^m, 10 acima do solo. Qual é a altura da torre?

198. O angulo d'elevação do vertice de uma torre vertical cujo pé é inaccessivel é de $24^\circ 36'$; avançando 32^m para a torre, o angulo d'elevação do vertice é então igual a $40^\circ 12'$. Qual é a altura da torre? A base de operação é horizontal, e os olhos do observador estão a 1^m,50 de altura do solo.

199. Achar a altura de uma montanha. A base d'operação AB que se escolheu tem 225^m, os angulos formados por esta base e os raios visuaes dirigidos ao vertice da montanha são $A = 52^\circ 27' 18''$ e $B = 41^\circ 19' 25''$; além d'isto, um d'esses raios visuaes AC faz, com a vertical da estação A, um angulo de $43^\circ 19' 12''$.

200. Tres pontos A, B, C, sendo dados no mappa de um paiz, pede-se para determinar a posição de um quarto ponto M, d'onde as distancias $AC = 200^m$ e $BC = 170^m$ foram vistas debaixo de angulos conhecidos $\alpha = 46^\circ 17' 13'' 2$ e $\beta = 30^\circ 9'$. Sabe-se tambem que os quatro pontos estão sobre o mesmo plano, e que o angulo $ACB = 114^\circ 40' 8'',4$ (Calcular-se-ha MC.)

Exercicios que não exigem emprego de taboas.

201. Um dos lados de um triangulo é duplo de um outro e o angulo comprehendido tem 60°. Calcular os outros dois angulos.

202. Verificar que n'um triangulo rectangulo temos :

$$rr' = r'\,r''' = S$$

203. Achar a condição para que o raio do circulo circumscripto a um triangulo seja igual ao triplo do raio do circulo inscripto.

204. Exprimir as tres alturas h, h', h'', de um triangulo em funcção dos lados e dos angulos.

205. Calcular as tres alturas de um triangulo em funcção dos tres lados.

206. Em um triangulo, conhece-se um lado c e os angulos adjacentes A e B; calcular a bissectriz do angulo A e o segmento de BC adjacente a AB.

207. Dados os tres lados de um triangulo, calcular a bissectriz de um dos angulos.

208. Os lados de um triangulo medem respectivamente $x^2 + x + 1$, $2x + 1$, $x^2 - 1$, a letra x designando um numero maior que 1. Verificar que o angulo opposto ao primeiro lado é um angulo de 120°.

209. Os lados do angulo recto de um triangulo rectangulo sendo $2mn$ e $m^2 - n^2$, calcular as tangentes dos semi-angulos agudos.

210. Calcular os lados b e c d'um triangulo rectangulo do qual se conhece a hypothenusa a, e no qual os angulos B e C verificam a relação : $\text{sen } B = 2 \text{ sen } C$.

211. Os tres lados de um triangulo são $a = \frac{\sqrt{3}}{2}$, $b = \frac{\sqrt{2}}{2}$ e $c = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4}$; calcular, sem taboas, os angulos d'este triangulo, sua superficie e o raio do circulo circumscripto.

212. N'um triangulo $A = 45^\circ$ e os lados que o comprehendem $b = 4$, $c = \sqrt{2}$; calcular, sem taboas, o seno e o coseno de cada um dos angulos B e C.

213. N'um triangulo, $b = \sqrt{2}$, $c = \sqrt{3}$ e o angulo $C = 60^\circ$; calcular sem taboas de logarithmos : 1° o lado a ; 2° o seno e o coseno dos angulos A e B.

214. Calcular a base e os angulos de um triangulo isosceles, sabendo que o lado é igual a 2^m e a superficie a 1^{mq}.

215. O lado AB de um triangulo rectangulo em A é dividido no ponto I em dois segmentos. Exprimir, por meio de uma formula logarithmica, o segmento AI, conhecendo-se o outro segmento $IB = l$ e os dois angulos $BCI = \alpha$ e $ACI = \beta$

INDICE DAS MATERIAS

PRELIMINARES

PRIMEIRA PARTE

FUNCÇÕES CIRCULARES

CAPITULO I

Linhas trigonometricas.

CAPITULO II

Fórmulas trigonometricas.

CAPITULO III

Taboas trigonometricas.

CAPITULO IV

Equações trigonometricas.

SEGUNDA PARTE

APPLICAÇÕES GEOMETRICAS

CAPITULO V

Resolução dos triangulos nos casos elementares.

CAPITULO VI

Applicação ao levantamento de plantas.

CAPITULO VII

Resolução de triangulos fóra dos casos elementares.

CAPITULO VIII

Applicações diversas.

APPENDICE

EXERCICIOS E PROBLEMAS

PARIS. — IMP. E. DESFOSSÉS, 13, QUAI VOLTAIRE. — 93006.10-26.

MATHEMATICAS

Arithmetica elementar (Curso de), por B. ALVES CARNEIRO.
Curso elementar de Matemática, téorico, pratico e aplicado :
Primeira parte : **Arithmetica**, por Dr AARÃO REIS, professor da Escola politecnica do Rio de Janeiro.
Segunda parte : **Algebra**. 2 vols.

CURSO DE MATHEMATICAS ELEMENTARES

De F. I. C.

Revisto e adaptado as escolas de instrucção secundaria do Brazil.

Elementos de Arithmetica
— de lgebra.
— de Geometria.
— de Geometria descriptiva.

Elementos de Trigonometria.
— de Cosmographia.
— de Mecanica.
— de Agrimensura.

Geometria (Elementos de), por LEGENDRE e BLANCHET.
Taboas de logarithmos, por M. CHOLLET.

SCIENCIAS NATURAES

Agronomia (Noções geraes de), por MAXIMINO MACIEL.
Botanica Geral (Licões de), por MAXIMINO MACIEL.
Geologia (Resumo de), com 141 gravuras, no texto por A. DE LAPPARENT, traduzido pelo Dr B. F. RAMIZ GALVÃO.
Historia Natural (Curso de), por J. LANGLEBERT.
Mineralogia (Compendio de), por A. DE LAPPARENT, traducção do Dr B. F. RAMIZ GALVÃO
Zoologia e Botanica Geraes (Elementos de), pelo Dr. MANOEL BOMFIM.
Zoologia Geral e Descriptiva (Elementos de), por MAXIMINO MACIEL
Zoologia (Compendio de), pelo Dr. MANOEL BOMFIM.

PHYSICA E CHIMICA

Chimica (Compendio de), por L. TROOST. Traducção do Dr. B. F. RAMIZ GALVÃO.
Chimica (Curso de), por LANGLEBERT.
Physica (Tratado de), por J. LANGLEBERT.

GEOGRAPHIA

A terra illustrada.

Imp. G. Cavalier. Paris — 5-26